<u> </u>	1 pril 2024	Computability &	Undecidability
$P_{a}$		.       .	.       .
	Languages	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · ·	Annonnements	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	What can -	Turing Machines	compute?
· · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · <b>·</b> · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · ·			
· · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		
· · · · · · ·			

So Far # Turing Machines: a formal model of "algorithms"
Church - Turing Thesis. Everything that can be computed by a physically-realizable model of computation can be computed by Turing Machines.
So what can Turing Machines compile?

Decision	Problems ~~	Formal Languages
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
		A set of strings.
		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

Decision Proble	uns Forma	l'Langrages
$E_{x}$ 3SAT	.       .	
Decision Prob.	Given a 3CNF is there a sa assignment Z	fisfying = T = T
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		
<ul> <li></li></ul>	.       .	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		.       .

Decision Prob	eurs Formal Languages
$E_{x}$ 3SAT	.       .
Decision Prob.	Given a 3CNF $Q$ , is there a satisfying assignment Z s.t. $Q(Z) = T$ .
Language .	The set of all satisfiable BCNF formulas P
.       .	1       1

· · ·	l l l	· · ·	_a	MC	зV 		j.	e	· · ·				; ) 	× · ·	ĩ				· · ·	₹~	Ls	e		· · ·	ə{	· · ·	5				2 2	•
· · ·	•	· · ·	•			•	· · ·			) (r	· + + ·	· · ·	i Ce	Q	ph	جار			· · ·	· •	•	· ·	•	· · ·	•	· · ·	•	· · ·	•	· · ·	· · ·	•
· ·	•	• •	•	• •	• •	•	••••	• •	• •	• •	•	· ·	•	· ·	•		• •	•	· ·	• •	•	· ·	•	 . (. 	Ú L		T.	· · ·		=7	ا <sub>ر</sub>	
• •	•	• •	•	• •	• •	•	• •	•	• •	• •	•	• •	•	• •	•	•	• •	•	• •	•	•	• •	•	• •	•	• •	•	• •	•	• •	• •	•
• •	•	• •	•	• •	• •	•	• •		• •	• •	•	• •	•	• •	•	•	• •		• •	•	•	• •	•	• •	•	• •	•	• •	•	· ·	• •	
•••	•	• •	•	• •	• •	•	• •	•	• •	• •	•	•••	•	••••	•	•	• •	•	• •		•	• •	•	• •	•	• •	•	••••	•	• •	• •	•
• •	•	• •	•	• •	• •	•	• •		• •	• •	•	• •	•	• •	•	•	• •	•		• •	•	• •	•	• •	•	• •	•	• •	•	• •	• •	
••••	•	• •	•	• •	• •	•	• •	•	• •	• •	•	••••	•	• •	•	•	• •	•	· ·	· •	•	• •	•	• •	•	• •	•	• •	•	· ·	• •	•
• •	•	• •	•	• •	• •	•	••••	•	• •	• •	•	• •	•	• •	•	•	• •	•	• •	• • •	•	• •	•	• •	•	• •	•	• •	•	• •	• •	•
· ·	•	· ·	•	• •	• •	•	• •	•	· ·	• •	•	••••	•	• •	D D		• •	•	· ·	· •	•	• •	•	· ·	e e	• •	•	· ·	•	· ·	 	•
• •	•		•	• •	• •	•	• •	•		• •		· ·	•	• •	•	•	• •	•	••••	•		• •	•	• •	•	• •	•	• •	•	• •	• •	•

· /	A	Language		$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}$	subse f	$\overline{z}$
•	· · ·		input	applicabet	$\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{x}$	$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
•	· · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · ·		· · · · · · · ·	$\frac{1}{2} = 70 \text{ (J)}$
		<u>×</u>	· · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	·	PALINDROME				alindrome {
•	   	PAUNDROME		S $F$ $Z$ $K$ $S$ $K$		alindrome ;
• • • • • • • •	· · T · · · · · · · · ·	PAUNDROME				alindrome f

	Language	$L \leq 2^{*}$ is	a subse-	t off strings
  	$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \end{array} \\ \end{array} $	put alpha	2624	(110)
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			
	3.5AT =		f is a 3 f z s.t.	$CNF$ ( $\vec{z}$ ) = T
  	.       .		.       .	
  	.       .		.       .	.       .
· · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	·       ·

A Language LEIX is a subset of strings
Z = input alphabet WLOG Z=Z0,1J
$E_{\mathbf{X}} = \frac{2}{2} \left\langle \varphi \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{2}$
<ul> <li>denotes string encoding of math object</li> <li>Can assume objects of interest</li> <li>ave encoded as strings w EZ*.</li> </ul>

<u>Cxample</u> hanguages	
$3SAT = 2(P)$ : $3cNF \wedge 2$ $3SAT = 2(P)$ : $3cVF \wedge 2$	
PALINDROME = ZS: Sis a palindrome Z	•
	•
	•
	•
·       ·	•

Example Languages
f is a $3 CNF3\text{SAT} = 2(\langle \varphi \rangle) = 32 s.t. \varphi(z) = 7$
PALINDROME = ZS: Sis a palindrome J
$\frac{Complement Languages}{L} = \sum_{x} X L$
PALINDROME = Z* \ PALINDROME = ZS: S is NOT 2 a palindrome
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

Example Languages
$f$ is a $3CNF \land$ $3SAT = \frac{2}{\sqrt{P}}$ : $\frac{1}{2}z$ s.t. $P(z) = TJ$
PALINDROME = ZS: Sis a palindrome Z
$EMPTT-LANG = \phi = Z Z$
$ALL = \sum^{*} = Z w : w \in Z^{*} Z$
$\overline{AUC} = \overline{CMPT}$
EMPTY = ALL

Example Languages
f is a $3 CNF3SAT = 2(P): 3z$ , $f(f) = TJ$
PALINDROME = ZS: Sis a palindrome Z
GOLDBACH COUNTEREXAMPLES =
$ZO^{n} \cdot Hp_{i}q$ prime $N \neq p \neq q$ $Z$
Goldbach's Conjecture => GOLDBACH COUNTEREXAMPLES =
.       .

Annonnce	emerts.		
	Returned	his even	
× Hw8	Released	TODAY	.       .
	Dre Trurs,	25.4pv	III: 5.9. p.
.       .	.       .	.       .	.       .
.       .	.       .	·       ·	
.       .	.       .	.       .	.       .

Turing	Machins	recognize	languages.

Juring Machines recognize languages.	· · · · · ·
A language L is Recognizable (RE)	
there exists a TM M s.E.	· · · · · ·
$M_{\rm e} = M_{\rm e} = M_{e$	· · · · · ·
$\mathcal{W}_{\mathcal{E}} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{K}_{i}$	· · · · · ·
<ul> <li></li></ul>	· · · · · ·
·       ·	  
·       ·	  
	· · · · · ·

Turing Machines recognize languages. A language L s Recognizable (RE) if there exists a TM M s.E. Ma accepts we iff we we Accept we we  $W \in \mathbb{C}^{\times}$ 

Juring Machinis recognize languages. A language L s Recognizable (RE) if there exists a TM SE. Ma accepts we iff we we have Accept  $W \in \mathbb{Z}^{\times}$ Reject > w&L  $\mathcal{L}(M) = \mathcal{Z} \otimes \mathcal{Z} \otimes \mathcal{Z}$ 

Turing Machines recognize languages. s Recognizable (RE) if A language there exists a TM M s.E. Accept we  $W \in \mathbb{Z}^{\times}$ Reject > w&L  $\mathcal{L}(M) = \mathcal{V} \otimes \mathcal{L}$  we zet in Maccepts with

A language L is coRecognizable (coRE) if there exists a TM M s.E. Mi rejects will iff i we L Equivalently Le coRE d'Africa de Le RE (change the Accept and Reject states)

	ovil		Maje	n n n n n n			e : e :  	· · ·	De		Jal		· · · ·		R)	· · ·	· ·	· · ·		· ·
			Λ.J		act	د ، ، ، ، ۲ ، ۰ ، ۰ ۲ ، ۰ , ۰ ، ۰ ۲ ، ۰ , ۰	· · · · · · · · ·			· · ·	5			est a			)e (	275	<u>e</u>	  
· · · ·			· ·		Zna		· ·	ha		 ,	· ·	· ·	· · · ·	· ·	· · ·	· ·	· ·	· · ·	•	· ·
· · ·	· · · ·	· · · ·	· ·	· · ·	· ·	· · ·	· ·	· ·	· ·	· ·	· ·	· ·	· · ·		• •	· ·	· ·	· · ·	•	· ·
· · ·	· · ·	· · · ·	· ·	· · ·	· ·	· · · ·	· ·	· ·	· ·	· ·	· ·	· ·	· · ·	· ·	· ·	· ·	· ·	· · ·	•	· ·
· · ·	· · ·	· · ·	· ·	· · ·	· ·	· · · ·	· ·	· ·	· ·	· ·	· ·	· ·	· · · ·	· · ·	· · ·	· ·	· ·	· · ·	•	• •
· · ·	· · ·	· · · ·	· ·	· · ·	· ·	· · · ·	· ·	· ·	· ·	· ·	· ·	· ·	· · · ·	• •	· ·	· · ·	· ·	· · ·	•	· ·
· · ·	· · · ·	· · · ·	· ·	· · ·	· ·	· · · ·	· ·	· ·	· ·	· ·	· ·	· ·	· · · ·	· ·	· ·	· · ·	· ·	· · ·	•	· ·
· · ·	· · ·	· · · ·	· · ·	· · ·	· · ·	· · · ·	· ·	· ·	· ·	· ·	· ·	· · ·	· · · ·	· ·	· ·	· ·	· ·	· · ·	•	· ·

Some languages are Decidable (R). A Tuving Machine D is called a Decider if it always halts  $w \in \mathbb{Z}^{\times}$   $w \notin L$ Hwezt, Running Don input w ends in either Accept or Reject in finite steps

Some	(anguages		Decidable	$(R^{1})$
	inguage L	i $i$ $i$ $i$ $i$ $i$ $i$ $i$ $i$ $i$	ecidable i	f there exists
	decider	D. S.t.		$ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot $
· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · ·	.     .     .     .     .     .     .     .       .     .     .     .     .     .     .     .       .     .     .     .     .     .     .     .       .     .     .     .     .     .     .     .       .     .     .     .     .     .     .     .	· · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
 	.       .	· · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	.       .
· · · · · · ·	·       ·	· · · · · · ·		<pre></pre>

Some languages are Decidable (R). A language L is decidable if there exists  $\alpha$  decider D s.t. P(D) = LTheorem. Lis decidable if and only if Land Lave vecognizable LER ENCORE

Theorem.	L is decidable if and only if
	and I are recognizable.
	L'is decidable $\Rightarrow$ Edecider D s.t. $L(D) = L$ . Observe: A decider is a recognizer!
LERE?	$accepts$ with $iff - w \in L$
LecoRE? D	$rejects  w  iff  w \notin L \\ \Rightarrow L \in coRE$
.       .	

	reorem.			decido		if an	d only	
· · · · ·			 		Mel a		)nizabl	e e e e e e e e Cer e e e e e e e e e e e e e e
Pf -		· · · · · · · ·	· · · · ·	· · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · ·		· · · · · · · ·
	-eRE		mad		1 s.t.	Mac		$\Rightarrow$ well
	E RE		nachi		s.t.	N rei		
			· · · ·					
· · · · · · ·				$t_i - t_{\alpha}c$	).   			· · · · · · · · ·
    	constru			$t_i - t_a p$	) C	cider ng.	A A A A A A A A A A A A A A A A A A A	
				$t_i - t_a p$		cider Ng. A	A A A A A A A A A A A A A A A A A A A	
				$t_i - t_a p$			A	

	ecide			· · · ·	· · ·	· · ·	· · · ·	· · ·	· · · ·	· · ·	· · ·	· · ·	· · · ·	· · ·	· · ·	· · ·	· · ·	· · ·
		rpint.		· · · ·	· ·	• •	· · ·	· ·	· · ·	• •	• •	• •	• • •				• •	 
	- Copy		· · · ·	, , , , , , , , , , ,	201	nd	+a	per	••••	• •	• •	• •	••••	•••			• •	• •
×	- In	par	alle			• •						• •	· · ·					
	Ĺ_,	$R_{\rm k}$			o ∕ _		 	$\sim$	-forf		ļ.	• •		•••			• •	
• •		Ruv	· · · ·	n n n NJ n n	€∖∕∖		· · ·				, , , ,	• •	••••	• •	• •	• •		• •
				1 4	•••					Y 2								
		either	, , , , , ( , , , , , , , , , , , , , ,	.ach			Acce	epts	$\frac{1}{2}$	ejec	45			, <del>1</del> 1		SOU	we.	
		either		ach		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	Acce	2-pf-5	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	ejec		· · ·		,	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	 SOU 		
		either		ach		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		2-pf-5	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	ejec				,		 SOU  		
				ach		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	A.c.ce	2-pf-5		ejec				,		 Sau    		
						· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		2-pf-5	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · ·		,				
							A.c.ce	2-pf-5	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·					,				
								2-pf-s	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		,				
							Acce	2-pf-5 	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·					,				
							Acce		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		,				

Decider D.
On input w * CODY w to second tape
× In parallel
La Run IVI on w on tape 1 La Run N on w on tape 2
* if either machine Accepts/Rejects, do the same
Suppose $W \in L \implies M$ accepts $W$ $\longrightarrow M$ does not reject $W$ . $J \implies D$ accepts $W$

Decider D.
On input w
* In parallel Le Run Mon w on tape 1 Le Run Non w on tape 2
Suppose WEL $\implies$ Maccepts W ( $\implies$ Daccepts W
Suppose $\implies$ N rejects W ( $\implies$ ) rejects W WEL
Madoes hot accept was

		•			•	• •	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •		•	•	•	• •	•	•	•	•	•		• •	•	•	•	•	• •	
																					•						•						•								
•	•	•	• •	•	•	• •	•	•	٠	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	• •	*	•	•	•	•	•	• •	•	•	٠	•		·
•	•	•	• •		•	• •	•	٠	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	•	•	٠		• •	•	•		•	٠	•	• •	•	•	0	•	• •	٠
•	•	•	• •	٠	•	• •	•	٠	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	• •	•	٠	٠	•	•	•	• •	•		٠	•	• •	٠
•	•	•	• •		•	• •		٠	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•				•	•	• •	•		٠	•	•	•		•	•	٠		• •	٠
	•	•	• •		•	• •				•		•	•		•							•	• •									•	•	•						•	
										•		•									•	•									•			•							
	•																				•																				
÷					÷						÷	·	÷	÷	1	÷	÷	,	÷	÷	•		5	)	·	÷					÷	÷	÷				÷	÷	÷		
•	•	*	• •	•	•	• •	*	•	•	•	•	•	•	١	Ih	İN	e	•	N	V.	•	W	2 /	•	•	٠	*	• •	•	٠	٠	•	٠	•	• •	•	•	٠	٠	• •	٠
•	٠				•	• •	•		٠	•		•	•	. •			•	•		•	٠	•		•	•	•		• •	•	•	0	•	•	•	• •	•	٠	0	۰	• •	•
•	•	*	• •	*	•	• •	•	*	٠	•	•	٠	•	•	٠	•	•	•	•	•	٠	•	• •	•	•	٠	*	• •	*	٠	٠	٠	٠	•	• •	•	•	٠	٠	• •	•
•	•	*		٠	•	• •	٠	٠	•	•	•	•	•	٠	•	٠	•	•	•	•	•	•	• •	•	٠	٠	٠	• •	٠	٠	٠	•	٠	•	• •	•	٠	٠	٠	• •	
•	•	•	• •		•	• •	•	٠	•		٠	•	•		•	•	•	•	٠	•	•	•	• •		•	•	•	• •	•	•		•	•	•	• •	•	•	•	•	• •	•
•	•	•	• •	•	•	• •	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	•	•	•		• •	•	•	•		•	•	•••	•	•	•	•	• •	•
•	•	•	· ·	•	•	••••		•	•	•	•	•	•	•	•	•	0	•	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	· ·	•	•	•	•	•	• •	• •	•	•	•	•	• •	•
•	•	•	· ·	•	•	· ·	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	· ·	•	•	•	•	· ·	•	•	•	•	•	•	· ·		•	•	•	· · ·	•
•	•	•	· · ·	•	•	· · ·	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	· ·	•	•	•	•	· ·	•	•	•	•	•	• ·	· ·		•	•	•	· ·	
•	•	•	· · ·	•	•	· · ·	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	· · ·	•	•	•	•	· · ·	•	· ·	•	•	•	• •	· · ·	•	•	•	•	· · ·	
•	•	•	· · ·	•	•	· · ·	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	· · ·	•	•	•	•	· · ·	•	•	•	•	•	•	· · ·	•	•	•	•	• •	•
•	•	•	· · ·	•	•	· · ·	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		· · ·	•	•	•	•	· · ·	•	•	•	•	•	•	· · ·	•	· · ·	•	•	· · ·	•
•	•	•	· · ·	· · ·	· · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	•	· · · ·	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		· · ·	· · ·	•	•	•	· · ·	•	•	•	•	•	•	· · ·	-	· · · ·	•	•	· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
•	· · · ·	•	· · · · · · · · ·	•	· · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	•	•	•	•	· · ·		· · · ·		•	•	· · ·	•	•	•		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	•	•	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	•	• • • • • •	•	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	- - - - - -	· · · ·	•	•	· · ·	
		•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	· · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	•	· · ·	• • • • • • • •	•	• • • • • • •	• • • • • • •	•	•								· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	•	· · · ·	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	•	•	•	•		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	· · · ·		•	· · ·	
		•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · ·	• • • • • • • • •		• • • • • • • •		• • • • • • • •									• • • • • • • • •		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·					· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				• • • • • • • • •	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•			•		
			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·						• • • • • • • • •											· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·					· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				• • • • • • • • • •	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
	• • • • • • • • • •		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·						• • • • • • • • • •						• • • • • • • • •				•						· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · ·				• • • • • • • • •	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · ·				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·						• • • • • • • • • • •																· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·					• • • • • • • • • • •	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
						· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·						· · · · · · · · · · · · · ·																					• • • • • • • • • • • •	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
												• • • • • • • • • • • • •																					• • • • • • • • • • • • •	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
												• • • • • • • • • • • • • •	• • • • • • • • • • • • • • •																				• • • • • • • • • • • • • •	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
																																	• • • • • • • • • • • • • • •	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·							

$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	
	Decidable in exponential time (try all witnesses and verify)
Decidable in	polynomial time

. . Decidable R P Decidable in finite P fi ne

Recognizable (RE) Decidable (R)NP P Recognizable

Recognizable (RE) Devidable (R)RE E. P Claim. There exist Undecidable languages

Recognizable (RE) Decidable (R)REALORE € RE There exist Unrecognizable languages 

Key to Une	decidability.	Self - Refer	
$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} angva\gamma \\ angva\gamma \\ angva\gamma \end{bmatrix}$		Turitz Mac	hines 1
$= \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 $	$\left\langle \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	has some	$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
.       .	TM descriptions		property of inferest
.       .	.       .		

The Dia	gonal · · l	angrage	· · · · · · · · ·
DIAG = Z		M does <u>No</u> t accept	$\left\langle \begin{array}{cccc} & & & & & & & & & & & & & & & & & $
	TMS	that do not accept vown description	
Theorem,	DIAG	is undecidable	.       .
$\frac{1}{2}$		is undecidable	.       .
		is undecidable	.       .

DIAG = 7 KM>: M does NOT accept KM> ( Pf. By contradiction. Suppose J D that decides DIAG Consider the behavior of D running on (D).

DIAG = Z {M} : M does NOT accept {M} ( Pf. By contradiction. Suppose J D that decides DIAG Consider the behavior of D running on (D). Case (1) Suppose  $\langle D \rangle \in L(D) = DIAG$ > (D> E DIAG => D does Not accept (D)  $\Rightarrow$   $\langle D \rangle \notin \mathcal{L}(D)$ contradictur

DIAG = Z (M): M does NOT accept (M) ( Pf. By contradiction. Suppose J D that decides DIAG Consider the behavior of D running on (D). Case Suppose  $\langle D \rangle \in \mathcal{L}(D) = DIAG$ > (D> E DIAG = D does Not accept (D)  $\Rightarrow$   $\langle D \rangle \notin \mathcal{L}(D)$ contradictor Case a contraction Suppose  $\langle D \rangle \notin L(D) = DIAG$  $accepts \langle D \rangle$  $\Rightarrow$   $\langle D \rangle \notin DIAG \Rightarrow$  $\implies$   $\langle D \rangle \in \mathcal{J}(D)$ Contradiction