CS 4820	Design 2	Analysis of	Algorithms
l'ustructors	Prof Michae Prof. Bobby	Kleinberg	. .
Plan for tode	x y 2.2. Jan.	2.024	. .
 Motivation Brief Adm 	for 4820 initistrivia
(3) Case Study	Tiling Problem		. .
.

	Mo	tivation		· · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · ·
Al	govith	ms	ີເລີ	the	study of	how to	solve Cor	uputationa	l problems
• •	<u> </u>	mprtatie	mal	Pro	blem Examples		· · · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · ·
· ·	· · · ·	given	· · · ·	road	map, find	flie sh	lovfest pat	h from	A to B
· ·	· · · ·	given	· · · ·	list	of integers	s, veturi	n them in	n sorted	order .
· ·	· · · ·	given	· · · ·	social	network, fi	ind a lave	ge <u>clique</u>		· · · · · · · · ·
• •							(mutually	-connected	accounts)
· · ·	· · · ·	 . .<	· · · ·	· · · ·	(mutually)	- connected	accounts)
 . .<	 . .<	 	 . .<	 . .	<td> </td> <td>(mutually)</td> <td>- connected</td> <td>accounts)</td>		(mutually)	- connected	accounts)
 . .<	 . .<	 	 . .<			(mutually)	- connected 	accounts)
 . .<	 . .<	 	 . .<	 . .	<td> </td> <td>(mutually)</td> <td>- connected </td> <td>accounts)</td>		(mutually)	- connected 	accounts)
 . .<	 . .<	 	 . .<	 . .<	. .			- COMMERTED	accounts)

1) Motivation
Algorithms is the study of how to solve computational problems
Comprtational Problem Examples
* given a road map, find the shortest path from A to B
* given a social network, find a large <u>clique</u> (mutually-connected accounts)
Can we solve these problems? Can we solve them efficiently?

1) Motivation
Algorithms is the study of how to solve computational problems
Compriational Problem Examples
* Given a road map, find the shortest path from A to B
* given a list of integers, return them in sorted order.
* given a social network, find a large <u>clique</u> (mutually-connected accounts)
Can we solve these problems? Can we solve them efficiently?
An <u>algorithm</u> is a well-defined sequence of steps (i.e., a recipe) to solve a problem.
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

		N	' 1) 	n M M	•	с 2 2	58	2			1	•	•		•		•		•	•	•		•		•		•		•	•	, . , .			•	•		· ·	· ·		•		•	· ·	
•	•	۲ ۲	•	•	T	-+	ہ ک	•	•			•	י גרי	e f	} ^r	ri	ve	≥.v	V	ب	λ^{+}		•	•	•	•	•	•	•	• · ·	· ·	•		•	•	•	• •	• •	•		•	•	· ·	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•	·	Ň	lþ.	J.	7	•	Ą	٩	, √ •	:†1	M-	_ 2-	5	ho	M		rp	• •	15			2~/	y	C		e 0	•	off			۲
•	•	•	•	•	0	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	• •	•	•	•	•	•	• •	• •	•	•	•	•	• •	•
•	•	•	•	•	•	*	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	÷	•	•	•	•	•	• •	÷	•	•	•	•	• •	• •	•	•	0	•	• •	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	• •	• •	•	•	•	•	• •	÷
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	· •	•	•	•	•	•	• •	• •	•	•	•	•	• •	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0	0	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	• •	• •	•	•	•	•	• •	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	• •	•	•	•	•	•	• •	• •	•	•	•	•	• •	•
•	•	•	•	•	0	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	٠	•	•	•	•	• •		•	•	•	•	• •	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	• •	•	•	•	•	•	• •	· ·	•	•	•	•	• •	•
•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0	0	•	•	•	•	•	•	•	0	•	•		• •	÷	•	•	•	•	• •	• •	•	•	•	•	• •	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	· ·	•	•	•	•	•	• •	• •	•	•	•	•	••••	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	, , , ,	٠	•	•	•	•	• •	• •	•	•	•	•	• •	٠
•		•	•	•	٠	•	•	•	•	•	•		•	•	•	٠	•	•		•	•	•	·			•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•				•		٠	• •	•

	hy	4	87		7	· ·	· ·	· · ·		· ·	· · ·	•	· ·	· · ·	•	· ·	· ·	· ·		· ·	· ·	· ·	· ·	· · ·	•
*****	· · ·	T+	، کے		· · ·	re'	zni	re 7	Nie		· · ·		· ·		•	· · ·		· · ·		· · ·	· · ·	· · ·			•
· · · ·	· ·	· · ·	· ·	· ·	· · ·	· · ·	 	J			• V. ^ . • • •		\$\$ 			· · ·				. J . 				· ·)
÷.	· · ·	The	~ 	alo	Jori	+h	MIC	le	ins	· · ·	อะ	\	oth		n N	iela	Ţζ	 		· ·	· · ·	· ·	· ·	••••	•
· · ·	• •		• •	• •	 	· ·	. A	1907	v i. 17	,,,,, 	: : ·		<u>ج</u> .	ne.	N .	. per	rspe Econ		Bi		Phy	sics,	So.c		jΥ
				• •			• •		• .		• •	•								• •			• •		•
· · ·	• •	• • •	• •	• •	• •	• •	• •		•	• •	• •	•	· ·	••••	•	• •	• •	••••	•	• •	• •	• •	• •	••••	•
· · ·	· ·	• • •	• •	• •	• •	• •	• •	· ·		· ·	• •	•	· ·		•	· ·	• •	· ·		• •	•••	• •	• •	••••	
· · ·	· ·	· · ·	• •	• •	• •	• •	• •			• •	· ·	•	· ·			· ·	• •	••••		• •	• •	· ·	• •	• •	
· · ·	· ·		• •	· ·	· ·	· ·	· ·	· ·		· ·	• •	•	· ·	· ·		· ·	· ·	· ·		• •	· ·	· ·	· ·	· ·	•
· · ·	· ·	• • •		• •	· ·	· ·	••••		•	• •	• •	•	• •		•	· ·	· ·			• •	· ·	· ·	· ·		•
									•	• •	• •	•	• •		•	• •	• •		•	• •					•

Why 4820?
* It's a requirement. -> Why? Algorithms show up in every area of CS.
* The "algorithmic lens" on other fields Algorithms give new perspectives in Econ, Bio, Physics, Sociology
* Algorithmic Thinking is problem solving
-> Designing algorithms requires creativity -> Analyzing algorithms requires clarity of thought
Precise definitions 2

•	Gv	id:	nej		2 hi	1050	phi		· ·	•	· ·	· ·	· ·	· · ·		· ·	· ·	•	· ·	· ·	• •	· ·	• •	· ·	•
•	For	Ma	мy	C D	m pu	nta i	for		· ·	r P v r	56	lev				· · ·	 		· ·	Le de la de		 	• •	· · ·	• •
	The	VC)	<u>.</u>		,S (∖	mpre	<u>,</u> , , , ,		л т .	÷	. 1.6 		T_{1}			• •			24				• •		•
•	· · · · ·	· ·	· · · ·	· · ·	· ·	· ·	· · ·	· ·	· ·	•	· ·	· · ·	· ·		•	• •	••••	•	• •	· · ·				• •	•
•				• •				• •	• •	o o	• •	• •		•••	•	• •	• •	÷	• •	• •	• •	• •	• •	• •	•
•	 	· ·		•••			· ·	• •	• •	•		• •			•	•••	••••	•	•••		• •		• •	· ·	•
•			• • •	 	• •	• •	• •	• •	• •	•		• •		• •	•	• •	• •	•	• •		o (• •	• •	•
				•••				• •	• •	•		• •			•	• •	• •	•	• •	• •	• •		• •		÷
•	· · · · ·	· ·		· • •	• •	• •	• •	• •	• •	•	• •	• •	• •	• •	•	• •	• •	•	• •	· ·	• •	• •	• •	• •	•
•				•••	• •		· ·	• •	• •	•					•	• •	•••	•	• •		• •		• •		•
•	· · · · ·	· ·		· • •	• •	• •	• •	• •	• •	•	• •	• •	• •	• •	•	• •	• •	•	• •	••••	• •	• •	• •	• •	•
•					• •	• •	• •	• •	• •	•		• •	• •	• •		• •		•	• •		• •		• •		•
•	· · · · ·	· ·	· · ·	• • •	• •	· ·	· ·	• •	• •	0	• •	• •	· ·	• •	•	• •	• •	•	• •	· ·	• •	• •	• •	• •	•
•						• •	• •	• •	• •	•	• •	• •		• •	•	• •	• •	•	• •		• •	• •	• •		•

Guiding Philosophy
For many computational problems there is a simple, but inefficient algorithm.
e.g. Shortest Path from A to B: - Iterate through every path in the road map. - If the path connects A to B, - Frecord the path and its distance
- Return the A->B path of minimum distance
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

Guiding Philosophy
For many computational problems there is a simple, but inefficient algorithm.
eg. Shortest Path from A to B: - Iterate through every path in the road map. - If the path connects A to B, - record the path and its distance - Return the A>B path of minimum distance
Concern. There are exponentially many paths in a map.
. .

Guiding Philosophy For many computational problems there is a simple, but inefficient algorithm. eg. Shortest Path from A to B. - Iterate through every path in the road map. - If the path connects A to B, its distance Return the A->B path of minimum distance Concern. There are exponentially many paths in a map. Key Question: Can we do better?

2) Intermission: Administrivia	· · ·	· · · · · · · · ·
All information @ course website cs.cornell.cdu/courses/cs 4820	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}$	2-4 sp
L> Get on Ed Discussion & Gradescope	LS 	· · · · · · · · · ·
Course Structure	· · · ·	
* "Required" Lecture MWF		$\bigcirc \ \ \sim \ \times \ \ \sim \ \ \times \ \ $
* Homework (Roughly) Weekly		25°/~~
* Exams	· · · · · · ·7 ·	· · · · · · · · ·
$- \operatorname{Prelim} \# 1 , 20 \operatorname{Feb}$ $- \operatorname{Prelim} \# 2 , 11 \operatorname{Apr}$		75%
- Final Exam, Finals Week TBD.	· · · ·	· · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	· · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · ·	· · · · · · · · ·

Pre ve	equisite CS 280 - Discre - Forma	es te math l proofs	(sets, graph (induction,	s basic probabili-	(y_{1})
ov A	CS = 311 $-in CS 2$ $Ring 6$	$\left(\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$			
 <u>.</u> 	- Dig-C - Basic	Data Str	(tor runtime uctures (lists	queues, stacks,	arrays, hash tables)
 <u></u> 	- Basic	Data Str	uctures (lists	neves, stacks,	arrays, hash tables)
 	- Basic	Data Str	(tov vuntime uctures (lists	queres, stacks	arrays, hash tables)
· · · · · · ·	- Basic	Data Str	uctures (lists	- analysis) queues, stacks	arrays, hash tables)
· · · · · · ·	- Basic - Basic	Data Str	uctures (lists	- analysis) queres, stackey	arrays, hash tables)
· · · · · · ·	- Basic	Data Str	uctures (lists	- analysis) yneves, stackey,	arrays, hash tasles)
· · · · · · ·	- Basic	Data Str	uctures (lists	- analysis) yneves, stackey,	arrays, hash tables)
· · · · · · ·	- Basic	Data Str	uctures (lists	- analysis) yneues, stackey,	arrays, hash tables)
· · · · · · · ·	- Basic	Data Str	uctures (lists	- analysis) yneues, stackey,	arrays, hash tables)
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	- Basic	Data Str	uctures (lists	- analysis) yneues, stackey,	avrays, hash tables)
. <td>- Basic</td> <td>Pota non</td> <td>uctures (lists</td> <td>- analysis) yneues, stacks,</td> <td>avrays, hash tables)</td>	- Basic	Pota non	uctures (lists	- analysis) yneues, stacks,	avrays, hash tables)

	3			\sum_{o}	-Se		s Sfr	rd i	1.	, ,	い い い			νip	~t~	tion	$\left \frac{\partial}{\partial x} \right $	 f		م اف	ms	ی ا ا		- ; ! ; !	· · voj	P	rob	lems
•			0 0		•	•		• •	8	• •	•	•	• •	• • •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	•	• •	•	•		• •	•	
•	•	• •	•	• •	•			• •	•		•	•	• •		• •		• •	• •		• •		• •	• •			• •	•	
•	•	• •	•	• •	•	0 · ·		• •				•	• •	• •	• •	• •	• •	• •	0 0	• •	•	• •	• •	•	• •	• •	÷	
•	•	• •	•	• •	•	• · ·	• •	• •				•	• •	• •	••••			•••	• •	• •		• •	• •		• •	• •	•	
•	•	• •	•	• (Slag		• •	• •	Ť	ile	•		• •	•••	• •	• •	• •	• •	• •	• •	•	• •	• •	•	• •	• •	•	
•	•	•••	•	• •	S	Υ <u></u>		•••	•	Ţ.,	•	*	• •	•••	• •	• •	• •	• •		•••		• •	•••			• •		• • •
•	t	· · ·	۰ د [۱		•	Δ	· ·			 ۲	•	•		· ·	・ ・ く ・	ini H	· ·	l.e	· · ·			· ·			 	· · ·	· ·	
•	L	ztin			•	t, l	Ţ			.ot.	, CA	•	s na	pe	. د_ ، ،	ç i i					an	1	V 000	rger			۲ ^و ۲	
						ho	N - «	over	rla	PP'	مبرا		COL	sies	, O	+ . +	,T	hat	C	smp	lett	IN	<u> </u>	600		. <u> </u>	• د	
•	•	• •	•			~			٠)	• • •				• •							٠	• •	• •		
•	•	· · ·	•		•		• •	• •	•	· · ·)	· · ·	· · ·	· ·	· ·	• •	• •	· ·			 	· ·	•	• •	• •	•	· · ·
•	•	· · ·	•	· · ·	•		· · ·	· · ·	•	· · ·)	· · ·	· · ·	· · ·	· · ·	· · ·	· · ·	· · ·	· · ·		· · ·	· · ·	•	· · ·	· · ·		· · · ·
•	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	· · ·	•		· · ·	· · ·	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			\ 	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · ·		•	 	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	· · · ·
•	· · · ·			· · ·	· · · ·		· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•						· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			•		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
• • • • • •	· · · ·							· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•						· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
	· · · · ·							· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·									 . .<	 . .<			· · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · ·	
	· · · · · · ·							· · · · · ·								· · · · ·	 . .<	 . .<			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
								· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·								· · · · · ·	 . .<	 . .<					· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		

	3		jonse		Sfr	ndr	J	ີ ເປັ	ہ لہ ¹ 1	, , ,		иp	√ fc				Pr	- o b	len	م <u>م</u> م	е В		ilic		Pr	<u>оЫ</u>	ems
· · ·	· ·	· ·			•	· · ·		· · · ·		•	· ·	· · ·	Q		\	S s'	be f	iled	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		Ł	יייי קייי ייייי ייייי	· ·	•	· ·	· ·	· ·
· · ·	· · ·	· · ·	Sh	ape	•	· ·	T	ile t	•	•	· ·	· · ·	•	· · ·	· · ·	· · ·	· · ·	· ·	· •	· · ·	•	· ·	· · ·	•	· ·	· · ·	· · ·
i i	Defin	ifia	\$	A	fil	lina		of.		•	sha	pe.	S	 	ith	fil	e t	i i	S 0			, om	gen	ren	÷ · ·	e f	· · ·
• •			- 	ho.	N - 4	IVEN	la	ρρì	iho		Coj	oje.	ح	, f	.t.	th	at	Cov	nple	tel	Y	20	sver	s [S	 • .	
• •					•		•	· ·)	• •	• •				• •				• •	0	• •		•		• •	• •
· · ·	· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·			· · ·	•	· · ·)	· · ·	· · ·		· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	· · ·	· · ·		· · · · · · · · · · ·	0	· · ·	· · ·		· · ·	· · · · · · · · ·	· · ·
· ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				· · · · · · · · · · · · · · · · · ·	• • • • • • •		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·					· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	 . .<	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		 . .<				· · · · · ·	· · · · · ·		· · · · ·					· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	 . .<	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	 . .<	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

) 	3)	<u>_</u> ~s		Sfr	nd v	J	・ ・ ・ ・ ・ ・	∧		Θ'n	p~t	-~ (· · ·	Pro	bb	zm	، و کے	• <u></u> •	} }; , , , , , , , , , , , , , , , , , , ,	iw		Pr	ò b	em	5
•	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · ·	· · ·	· · · · · · · · · · ·			Yes	· S · · ·	 	$\{i\}$		₩ ₩ /	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	· · ·		· · ·	•	•
•	Def	initi		hape S A	· · ·	ling		t of		5(nape	, , , , , , , , , , , , , , , , , , ,	· · ·	wift		ile	t.	i,s		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		viv d'e		 	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	e f	•	•
•	• •	· ·	· ·	h	5.N - 4	over	la	ppì		C	opi	es.	04		, . , . , .	hat	· _ C	<u>om</u>	plet	ely	•	<u>CoV</u>	<u>evs</u>		Ş	•		•
•		• •	• •	• •	• •	• •	0	• •		• •	• •		•	• •	• •		•	• •	• •	• •	•	• •	0	• •	•			•
•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	· · · · · · · · ·	· · ·	· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·		· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	· · ·	•	· · ·	• • • •	•
•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	 . .<	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	 . .<	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	· · ·		• • • • • • •
	 . .<	 . .<	 . .<	 . .<	 . .<	 . .<		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			 . .<			 . .<	 . .<			· · · · · ·	 . .<			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				

(3) Case Study in Computational Problems: Tiling Problems
$Q: Com S be filed w/ t^{?}A_{*}^{*} Yes!$
Shape S Definition. A filing of a shape S with tile t is an arrangement of non-overlapping copies of t that completely covers S.
The t-Tiling Problem. Given Shape S, can S be filed with t?
· ·
<pre> · · · · · · · · · · · · · · · · ·</pre>

* Dominos are 2×1 tiles 2 1 21 The Domino-Tiling Problem. Given Shape S, can S be filed with Dominos?	Example	#1. Don	nino - Tilive	$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$. .
The Domino-Tiling Problem. Given Shape S, can S be filed with Dominos?	* * * Dovninc	os ore 2x	1 files	$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	
Given Shape S, can S be filed with Dominos?	the Dou	nino - Tiling	Problem	. .	· · · · · · · · · · · ·
	Given	Shape S,	cam S	be filed with	Dominos?
	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	. .	· · · · · · · · · · · · ·
		· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·
		· · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·

Example #1. Domino - Tiling
* Dominos are 2×1 files $2 \boxed{2}$
The Domino - Tiling Problem.
Given Shape S, can S be filed with Dominos?
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
S: 4 × 4 square

Example #1. Domino - Tiling
* Dominos are 2×1 files $2 \boxed{2}$
The Domino - Tiling Problem.
Given Shape S, can S be filed with Dominos?
Claim. S can be Domino-tiled.
$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \end{array} \\ \end{array} $
S: 4 × 4 square

•		•		•	•			•	· · · ·	r S r	, , ,	4	· .×	;		5	' Z	na	LVE		. V	v /	· · · (<u>^</u> o	V v	n e	n N N	•	, 1 1 1	Me)√€	d	•	•	•	•	•	•	•	•	•	· · ·	· · ·	•	•
•	•	0	•	•	•	•	•	•	•	•		i A	V	1	•	r S	ľ	•	Ь	e e	•	•) ()	Ň	L'i	Й Л		•	· · ·		e. e.	J			•	•	•	•	•	•	••••	· · ·	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	0	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	* * *	0 0	* *	0 0	•	•	•	•	•	•	•	• •	• •	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	· ·	· · ·	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	••••	· •	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•••	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	• •		•	
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	· · ·	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•				•
	•	0	•	•	•	•	•			0	•	•	0	•	•	•	•	•		•		•	•	•		•		•	•	• •					•	•	•		e e		•	• •			
•	•	•	•	•	•	•	•			•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •				•	•	•	•		•		•	· · ·	•		•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	••••	• •	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •		•	•

•			4 × 4 3 zu	ανe · · · · ·		Vemored	. .
• •	Claim		CANNOT	.bc	Domino-	Tiled	. .
• •	· · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · ·		· · · · · · · · ·	· ·
• •	 	· · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · ·	· · · · · · ·		. .
• •	· · · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· ·
• •	· · · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·
• •	· · · · · · ·	· · · · · ·	 	· · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·
• •	· · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · ·			
•							· · · · · · · · · · · ·

•	· · ·		•	•			· · ·		, , , , , , , , , , , , , , , , , , ,	4 	·) ·	к Г			Z		-170	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·					K M		•	V e	2 M			•	•	•	· · ·	· · · ·	•	•	•	•	· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · ·
•	· ·		xi.	n M	•	•	e S	ر.	•	.(2 A -			อ โ -	•	•	b	C	0	•	ь Di	ס ת	Ai	 .⁄\ C	· · ·		Г.,	le	Д.	•	•	•	· ·			0	•	•	••••	· ·	•
•	• •		•	•	•		• •	•		•		•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	• •	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	• •	• •	•
•	 	24		•	•	B	.Y. 	•	Р.	av	; (۲.	•	Av	رمبر ر با	r.M	U.	~t	- 	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	•	•	•	•••	•	•	•	•	•	• •	· ·	•
•	• •	•	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	٠	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	•	•	•	*		•	0	•	• •	•	÷	•	*	•	• •	• •	•
•	• •	•	•	•	•	•	• •	0 0	•	•	•	÷	•	•	•	•	•	•	0 0	•	•	•	•	• •	•	•	•	•		•	0 0	•	• •	•	0 0	•	•	0 0	• •	• •	•
•	• •	•	•	•	•	•	•••	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	· ·	•	•	•	•		•	•	•	•••	•	•	•	•	•	• •	· ·	•
•	• •	•	•	•	•	•	• •	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	· ·	•	•	•	•	• •	•	•	•	••••	•	•	•	•	•		· ·	•
•	• •	•	•	0	•	•	• •	0		•	•	÷	•	0	•	0	•	•	0	e e	•	•	•	• •	÷	•	•	•	•	•	0	•	• •	•	0	0	•	0	• •	• •	•
•	• •	•	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	÷	•	•	•	0 0	•	•	0 0	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	· •	•	0	•	• •	•	•	0	•	•	• •	• •	•
•	• •	•	•	•	•	•	· ·	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	• •	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	• •	• •	•
•		٠	•	•			• •							•	•		٠	•				•	•	• •		٠	٠	•	•	٠	•		• •	•		٠	٠	•	+ (0

	S:4×4 square w/ corner removed
Claim	S' CANNOT be Domino - Tiled
$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	By Parity Argument.
Every	Domino covers exactly 2 squares.
	. .
 	. .
 	. .
 	. .

	$S: 4 \times 4$	square w/	Corner Vemorec		
Claim	S CANNI	e^{T} be t	omino - Tiled	. .	· · · ·
<u>P</u> <u>+</u> .	By Parity.	Argument.		· ·	· · · ·
- Every	Domino cove	vs. exactly	2 squares.	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
By n	on-overlappira	property,	every shape	that can be	· · ·
By n Do	on-overlapping mino - Tiled	property.	even shape even vinimber	that chin be i of squares.	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	on-overlapping mino-Tiled	Property Mas an	even Shape even vinimber	that chin be of squares,	 . .<
	on-overlapping mino - Tiled	Property ,	even Shape even Mumber	that chin be of: squares,	

S:4×4 square w/ corner removed
Claim S' CANNOT be Domino-Tiled
Pf. By Parity Argument.
- Every Domino covers exactly 2 squares.
- By non-overlapping property, every shape that can be Domine - tiled has an even number of squares.
- By non-overlapping property, every shape that can be Domino-Tiled has an even number of squares. - But S' has an odd (15) number of squares.
- By non-overlapping property, every shape that can be Domino-Tiled has an even number of squares. - But S' has an odd (15) number of squares.
- By non-overlapping property, every shape that can be Domino-Tiled has an even number of squares. - But S' has an odd (15) number of squares.

	٠										٠	•	•			٠			٠								٠	٠													
٠	٠	٠					7	٠	٠	•	•	٠		• •	٠	٠	•	٠	•	• •	٠	٠		٠	•	• •	٠	0		•	٠	٠		•		٠	• •		٠		٠
	٠			•	•								•			•		•	•		•	•	•	•	•		•	•				•	•		۰ ۱	•			٠	•	
٠	٠			•	•	• •	•		•	. 0	$\langle 1$	٠	6	х (2	2	5	Ne	a. A	2	W	1.	ÖC	ρġε	эςÌ	v	21	С	o '√	Ne	жS		re	m)√e	d	•		٠	٠	٠	٠
	٠	•		•	•		•	·	•	. C		•	, U	· ·	•		8.	•	•	• •	/ .	[Į.			.) .	•	•			•	٠		•	•	•	• •		٠	•	•
*	•	•		•	•		•	·	•	•		٠	٠	• •		•	•	٠	•	• •	•	•	٠	•		• •	٠	٠	٠	• •	٠	•	٠		•	٠		٠	•	٠	•
•	•	•		Ĩ	*	• •	•	٠	٠	٠	٠	٠	٠	• •	٠	٠	٠	٠	•	• •	٠	٠	٠	٠	*	• •	٠				•	, ic	ブ	٠		٠	• •	٠	٠		•
٠	•	•	•	\							•	•	(•	2	11	•	h	, 2	• •	\mathbb{D}		nî	N ©	, - ,	'	1.	. é	$2\dot{o}$		(· ·	•	•	•	• •		٠	•	•
٠	•	٠	*	•	*	• •	•	•	•	٠	٠	•	\cup	,00	ν(.	٠	U	•	•	. •0.	- .	*		٠	•	• •	٠	•	٠	• •	٠	٠	٠	•	٠	•	• •	٠	*	۰	*
	•	•	•	•	•	• •	• •	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•		•	•	•	•	•		•	•	•		•	•	•	•	•	•			•	•	•
•	·	•	•	•	٠	• •	•	٠	•	•	•	٠	٠	• •	•	•	•	٠	•	• •	٠	•	٠	٠	•	• •	٠	•	•	• •	٠	•	٠	•	٠	٠		•	٠	۰	٠
*	٠	٠	*	•	٠	• •	• •	•	•	٠	•	•	•	• •	•	•	٠	•	•	• •	٠	*	•	٠	•	• •	•	•	٠	• •	•	٠	*	•	•	•	• •	•	*	•	٠
•	•	•	•	•				•	•	•	•	•	•			•	•	•			•	•	•	•	•		•	•	•		•	•	•	•	•				•	•	•
•	•																	•					•				•														•
				•																																					
				•																		•																			
																•																			•						
			٠	•							•						•					٠	٠					0											٠	0	٠
				•	*		•					٠				٠	•	*			*		٠					٠					٠		٠	•				٠	
																																			•						
	·		•	•	•		•					٠	٠			•	•	٠					٠	•			•	٠				•	٠		٠	•		•	٠	٠	
*				•	•		•												•									•												•	
	·						•	•				٠	٠			٠		٠			•		٠	٠	•		٠	٠			٠		۰		٠	•		•		٠	
	•			•	•		•						•						•		٠	•	•	•	•			•	•			٠			•	•			•	•	
٠	٠				•	• •	•	•				٠	٠			٠		•			٠	•	٠	٠	•		٠	٠	٠		٠	•	٠		٠	٠		٠		٠	•
•	•				•	• •	•	٠				٠	٠			٠		٠			٠	•	٠		•		٠	۰			٠	•	٠		•	٠		•	•	۰	•
	•	٠	*	•	*		•		•	٠	•	•	•	• •		٠	٠	•	•	• •	٠	*	٠	٠	•	• •	•	٠		•	•	٠	٠	•	٠	•	• •	•	٠	٠	*
	٠		٠	•	٠	• •	•	٠	•		•	٠	٠	• •	•	٠	•	٠	•	• •	۰	٠	٠	٠	•		٠	۰	٠	• •	٠	٠	٠	•	٠	٠			٠	٠	٠
•	·		٠	٠	٠		•			٠	٠	•	•	• •	٠	٠	٠	•	•	• •	0	٠	٠	٠	٠	• •	•	٠	٠	•	•	٠	۰	٠	٠	٠	• •	•	٠	٠	٠
٠	٠	•	•	•	•		• •					•	•		•	•	•	•	•		•	•	•	•	•		•	٠	•		•	•	•		•	•		•	•	•	٠
٠	٠	٠		٠	•	• •	•	•				•	•		٠	٠		•			٠	•	٠	۰	•		•	٠	٠	•	٠	•	۰		٠	•		•	•		٠
•	•	•	•	•	•		•	•	•			٠	•			•	•	٠	•		•	•	•			• •		•	•	• •	•	٠	٠		•	•	• •	•	•	٠	

•	•	•					T		· · ·	S''	•	6	× (4	2	87	pile	e de la constante de la consta	· · ·	v √	/ .	op	, 2 ө (, , , , , , , , , , , , , , , , , , ,	q	· · ·	° o ∨	Ne	∕v S		e W	1D√	e J	•	· ·	· · ·	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
•	•			añ	M		•				•		- - - - - - -	- - - - - -	0.7	•	•	Ъе).0 (· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		ی ر			` (e		•	· · ·	· · ·	•	•	· · ·	· · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
•	•	•	· · ·			•	•	· · ·	· · ·		•		· · ·		•	•	•	· · ·		•		· · ·	•	•	· · ·		· · ·	· ·	•	· · ·			•	· · ·	· · ·		· · ·
•	•	•	· · ·	•	•	•	•	· ·	· ·	•	•	•	· ·	•	•	•	•	· · ·	•	•	•	· ·	•	•	· ·	•	•	• •	•	· ·	•	•	•	• •	· ·	•	· ·
•	•	•	• •	•	•	•	•	• •	• •	•	•	•	• •	•	•	•	•	• •	•	•	•	• •	•	•	• •	•		• •	•	• •	•	•	•	• •	• •	•	• •
•	•	•	· · ·	•	•	•	•	• •	· · ·	•	•	•	· · ·	•	•	•	•	· · ·	•	•	•	· · ·	•	•	· · ·	•	• •	• • • •	•	· · ·		•	•	· · ·	· · ·	•	· · ·
•	•	•	· · ·				•	· ·	· · ·	•	•	•	· · ·		•	•	•	· · ·		•	•	· · ·		•	· ·	•	• •	· ·	•	· · ·		•	•	· ·	· · ·		· · ·

S'' 6x6 square w/ opposing corners removed.
Claim S'' CANNOT be Domino-Tiled.
Pf, By coloring argument. - Consider coloring the squares of S w/ white & Blue s.t. adjacent squares are of different colors.

S'' 6x6 square w/ opposing corners removed.
Claim S'' CANNOT be Domino-Tiled.
Pf. By coloring argument. - Consider coloring the squares of S w/ white & Blue
st adjacent squares are of different colors.
s.t. adjacent squares are of different colors. - Every Domino covers exactly 1 white & 1 Blue square
st. adjacent squares are of different colors. - Every Domino covers exactly 1 white & 1 Blue square

S'' 6x6 square w/ opposing corners removed.
Claim S' CANNOT be Domino-Tiled.
Pf. By coloring argument. - Consider coloring the squares of S w/ white & Blue s.t. adjacent squares are of different colors.
- Every Domino covers exactly 1 white & 1 Blue square
- Thus, every shape that can be Domino Tiled has an equal number of White & Blue squares.
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

S'' 6x6 square w/ opposing corners removed.
Claim: S'' <u>CANNOT</u> be Domino-Tiled. PG By coloring argument.
- Consider coloring the squares of S w/ White & Blue s.t. adjacent squares are of different colors.
- Thus, every shape that can be Domino Tiled has an equal number of White & Blue squares.
- But S" has 16 White squares &

	$ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4$			
	$\frac{1}{2}$	be Domino-	Tiled?	. .
	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·
. .	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·
. .	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·
.

Definition. A pigeonhole obstruction a set of Blue squares B, wit a set of Blue squares B, with adjacent White squares W S.t. |W| < |B|.

• • • • • • • •	• • • • • • •								· · · · · · ·	•					D		fi a	<u>и</u> 50	[] 	~	+ + +	0 {	r M	JV	A T	31 te			je E	<u>on</u> 597	h y h ve	ol	e_ ve			2 <u>2</u>				fv	- - - -	- Fl N	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	ي. ح	· · · · · · · · · · ·	(P	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	•			e N	16	Ma	2		•	Ţ	f	•	0	م	•	S	hi	af	e.	9			י ר נ	•	ho	x :S	• • •	•	d'		·	210	je i	on	ĥ	· c	e	•	D	b≤	5 -+	7/ l	Л° С	to	، ھ <i>ک</i>	/	• •
	•			•	0	•	•	•	•	. –	TL	e	M	•	۰ ۲	+		Ċ	a	5	. N	D	f.	•	. [0 C		•)ø 1	۱ . ۸۸	ìn	ں ض	(. T	i [.e (Ţ		•	•	•	•	•	•		• •
•	•	•	•	•	•	•	•	•	÷	•	•	•	•	•	•	•	•				•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•	•		•			•	•	•	•	•	•		•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	• •
	•	٠	•		٠	•	٠		•		٠	٠	٠	٠	٠	۰	٠	•				٠	٠	٠	٠	٠	•		٠		÷	٠	0	•	•	•		•	0		٠	٠	•	0	٠	٠	
•	•	٠	•	٠	•	٠	٠		•		٠	•	٠	٠	٠	۰	•	•			•		٠	٠	٠	٠	٠	•	٠		•	•	•	•	٠	•	•	٠		٠	٠	٠	٠	٠			
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
•	•	•	٠	٠		٠	٠		٠	0		٠		٠		۰	•			,	•	٠			٠	٠	٠	٠	٠		٠	٠	0	•	٠	•	•			•	٠	٠	٠	0	٠	•	
•	*	•	*	٠	٠	•	٠		٠	0		٠	٠	٠	٠	٠	•	•		•	•		*		٠	٠	٠	٠	٠	•	*	·	0	*	٠		•	•	*	•	٠	٠	٠	0	٠	•	• •
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•			•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •
*			*						*			*			•			•		•			*								*			*	•	*			*	•						*	
•	٠		•	•		٠	٠		٠	٠		٠	۰	٠	٠		٠				*		۰		۰		٠	٠			٠			•		•					٠				•	٠	
٠	٠	•	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	•	•	•			٠	•	٠		٠		٠	٠	•	•	٠		٠	٠	•	٠	•	•	٠	•	٠	•		٠	٠	•	• •
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•			•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •
						*						•	•		•		•	•		,				•			•	•		•								•									• •
•	٠	٠	٠	٠		٠	•		٠		٠	٠		٠	٠		•	•			•	٠			٠	٠	٠	•	٠	٠	٠	٠	0	•	•		•	•		•		٠	٠		٠	٠	• •
	٠		٠	•	•	٠	•	•	٠	٠		٠	٠	٠			٠			,	٠	·	•		٠		٠	٠			٠		•	•	•	٠	•	•		•	٠			٠		•	• •
•	•	•	•	•	•	•	•	•		٠			*	•	٠	٠	•	•		•	•			•	•	•	•		•		•		•	•	•	•	•	•	•	•	٠	•		٠	•		• •
		•										•	•	•	•	•	•	•		•				•	•	•	•		•	•																	• •

· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·					· · · ·			i i i i i i i i i i i i i i i i i i i)ef a	<u>1ni</u> se	f f		, f W		 31~ Fe	oig e s -	eou 50 zuo	<u>ho</u> zho nve	le ve		<u>ost</u>	rua B, S,t	ste N	nit W			B	· · · ·
· · ·		_eN	 <u>1 M (</u> 		•	If H		2 .		nap C	е: с. V		r r r	• hc	xs oe				i ge e	onth - T			s bs	· · ·		Har	· · · / ·	•
· ·	Pf		В	y i		on+	· ጉ.ዲና	d î c	tie	- · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	5	Чf) po	Se			ha		· · · · ·	 .]		лін	· · · · ·	T	[];`t		•
· · ·	· · ·	•	· · ·	· · ·	•	· · ·	· · ·	•	· · ·	· · ·	•	· · ·	•	· · ·	• • •	•	· · ·	· · ·	•	· · ·	· · ·	· · ·	•	· · ·	•	· · ·	· · ·	•
· ·	· ·	•	· ·	· · ·	•	· ·	· ·	•	· ·	· ·	•	· ·	•	· ·	• •	•	· ·	· ·	•	· ·	· ·	· ·	•	· ·	•	· ·	· ·	•
· · ·	· · ·	•	· · ·	· · ·	•	· ·	· · ·	•	· ·	· · ·	•	· · ·	•	· · ·	• •	•	· · ·	· · ·	•	· · ·	· · ·	· · ·	•	· ·	•	· · ·	· · ·	•
· ·	· · ·	•	· ·	· · ·	•	· ·	· · ·		· ·	· ·	•	· · ·		· ·	• •		· · ·	· · ·		· ·	 	· · ·		· ·	•	· ·	· ·	•

· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·						-		· · ·		De a nd	.fi ja	иі 50-	$\frac{1}{f}$		e f	√ \ \	A Te	31. Fe	pii re s	yer E	22 30 10	ho no ve	<u>le</u> ~	ع 2_2 ر	<u>d</u>		$r \sim 3$			- th N	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	/)	B	· · · · · ·
· ·		_CW	 <u>1 M</u> 	<u>A</u>	· ·		f	 2M(۰ ۲ ۰			a pe Ca	د بر الا بر				ho k	n S De	· · ·				i ge n o	000	ho Ti	e e	 		≤ ¹ +	7 U	: c +1	ر ایھ کہ		
· · ·		· · · · ·	Fo Fo	S Y C	۲ ۲ ۲ ۲	EOV N	rtr e	20	tio	c.+ }	ist B		بو		5 i	P1 var	po ! re	se In	. B	S. I		ha Bl	: د ال	~~	nin	Ţ .os		mi	no .st		Τ; >e	1; 2 US	e J	•
· · ·	· · ·	•	· · ·	•	· · ·	•	• •	· · ·		•	· · ·		•	•	· · ·	•	•	•	· · ·		•	· · ·	•	· · ·	•	•	· ·	· · ·	•	•	· · ·	•	· · ·	
· · ·	· · ·	•	· · ·	•	· · ·	•	· ·	· · ·	•	•	· · ·	•	•	•	· · ·	•	•	•	· · ·	•	•	· · ·	•	· · ·	•	•	· · ·	· · ·	•	•	· · ·	•	· · ·	•
· · ·	· · ·	•	· · ·	•	· · ·	•	• •	· · ·	•	•	• •	•	•	•	· · ·	•	•	•	· · ·	•	•	· · ·	•	· · ·		•	· · ·	•	•	•	· · ·	•	· · ·	

	De	finition. A set of Bl jacent White	pigeonhole Ine squares = squares	obstruction is B, with N S.t. [W] <	
Lemma.	If a s	shape S has cannot be	Domino-	hole obstruction Tiled	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
Pf. By	contradict	ion Suppose	e S has a	Danino - Tiliz	
		- · · · · · · · · · ·	D IR D		
— To co — Fach	ver every of these c	Blue square i forninos also	n B, B Dou covers an ad	minos must be us	ed have
— To co — Fach	ver every of these c	Blue square i	n B, Bl. Dou	minos must be us	ed. have:
— To co — Fach	ver every	Blue square i	n B, Bl Dou	ninos must be us	
— Fach	ver every of these c	Blue square i	n B, Bl. Dou	minos must be us	

Definition. A pigeonhole obstruction is a set of Blue squares B, with adjacent White squares W S.t. W < B .
Lemma. If a shape S has a pigeonhole obstruction, then it cannot be Domino-Tiled.
Pf. By contradiction. Suppose S has a Domino - Tiling. - To cover every Blue square in B, IBI Dominos must be used - Each of these dominos also covers an adjacent white square.
- But if W × B , then by the Pigeonhole Principle some Dominos must share a White square, Violating the non-overlapping property.
Contradiction !

Definition. A pigeonhole obstruction is a set of Blue squares B, with adjacent White squares W S.t. |W| < |B|. If a shape S has a pigeonhole obstruction, Lemma. then it cannot be Domino-Tiled. Pf. By contradiction Suppose S has a Domino - Tiling - To cover every Blue square in B, IBI Dominos must be used Each of these dominos also covers an adjacent white square. But if |W| < |B|, then by the Pigeonhole Principle some Dominos must shave a White square, Violating the non-overlapping property. Contradiction ! Covollary. Stt cannot be Domino-Tiled.

The Domino	- Tiling Problen	1	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
Given Sha	ape S, cam S	3 be filed	with Dominos?
Obstruction	Lemma If	S contains a	pigeonhole
obstruc	tion, then it	cannot be	Domino - Tiled.
	· · · · · · · · · · · · ·		
· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	
· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

The Domino - Tiling Problem.
Given Shape S, can S be filed with Dominos?
Obstruction Lemma If S contains a pigeonhole obstruction, then it cannot be Domino-Tiled.
Revense Obstruction Lemma (Deep, Non-trivial fact!)
If S cannot be Domino-Tiled, then
it must contain a pigeonhole obstructure.
it must contain a pigeonhole obstructure.
it must contain a pigeonhole obstructure.
it must contain a pigeonhole obstruction.
it must contain a pigeonhole obstructure.
it must contain a pigeonhole obstruction.

The Domino - Tiling Problem.
Given Shape S, can S be tiled with Dominos?
Theorem. There is an efficient (i.e., polynomial-time)
algorithm that solves the Domino-Tiling Problem.
Namely Given shape S. the almost thm eithour
(a) Returns a valid Domino - Tilina Or
(b) Refrance a nimeon hale obstruction.
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·