Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Wojciech Moczydłowski, Jr
Nr albumu: 9174746

Teoriomodelowe dowody twierdzenia Gödla

Praca magisterska
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
prof. dr hab. Zofii Adamowicz
Instytut Matematyki Polskiej Akademii Nauk

Czerwiec 2003

Pracę przedkładam do oceny

Data   Podpis autora pracy:

Praca jest gotowa do oceny przez recenzenta

Data   Podpis kierującego pracą:

Streszczenie

W pracy przedstawiono zastosowanie istniejącego teoriomodelowego dowodu drugiego twierdzenia Gödla do dowodu wersji twierdzenia dla pewnych fragmentów arytmetyki Peano. Pokazana jest niedowodliwość we fragmentach pewnej wersji ich niesprzeczności Herbranda.

Słowa kluczowe

twierdzenie Gödla, arytmetyka Peano, słabe arytmetyki, niesprzeczność, niesprzeczność Herbranda

Klasyfikacja tematyczna

03. Mathematical logic and foundations
03F. Proof theory and constructive mathematics
03F30. First-order arithmetic and fragments

Spis treści

Wprowadzenie

Wir müssen wissen. Wir werden wissen.
Dawid Hilbert

Liczby naturalne od zawsze interesowały matematyków. W słowach Kröneckera: “Bóg stworzył liczby naturalne. Wszystko inne pochodzi od człowieka.”. Pod koniec dziewiętnastego wieku włoski matematyk, Giuseppe Peano, przedstawił w [Pea89] aksjomatykę liczb naturalnych, która z drobnymi modyfikacjami (zamiana aksjomatu drugiego rzędu o indukcji na schemat indukcji pierwszego rzędu) jest wciąż używana w teorii liczb.

W latach dwudziestych dwudziestego wieku matematyk niemiecki, Dawid Hilbert zarysował śmiały program badań w zakresie podstaw matematyki. Pierwszym etapem programu miała być formalizacja matematyki, obejmująca co najmniej arytmetykę, analizę i teorię mnogości. Drugim etapem miało być udowodnienie niesprzeczności wybranego układu aksjomatów, co ugruntowałoby wybrane podstawy i zlikwidowało możliwość wystąpienia paradoksów. Niemożliwym stałoby się wystąpienie kolejnego paradoksu Russella.

Kres programu Hilberta przyniósł artykuł [G3̈1], w którym Gödel przedstawił dowód twierdzenia, zwanego obecnie pierwszym twierdzeniem Gödla, o niezupełności arytmetyki. Artykuł ten zawierał przełomowe odkrycia i twierdzenia. Wykorzystując chińskie twierdzenie o resztach Gödel przetłumaczył zdania o własności arytmetyki jako systemu formalnego na język jej samej. Okazało się, że dla arytmetyki Peano można znaleźć zdanie, którego prawdziwość jest nierozstrzygalna w ramach przyjętego dla niej systemu aksjomatów. Co gorsza, na końcu [G3̈1] zaanonsowane zostało drugie twierdzenie Gödla, stwierdzające niemożność dowiedzenia w arytmetyce Peano jej niesprzeczności. Twierdzenia łatwo pociągały za sobą analogiczne twierdzenia dla dowolnych rekurencyjnych teorii, w których można arytmetykę Peano zinterpretować, w szczególności dla teorii mnogości. Program Hilberta legł więc w gruzach, każdy bowiem sensowny system aksjomatów matematyki powinien być i rekurencyjny, i dostatecznie silny, by interpretować podstawowy przecież w matematyce obiekt — liczby naturalne.

Od tego czasu prowadzono intensywne badania nad twierdzeniami Gödla, ciekawymi również z filozoficznego punktu widzenia. Oryginalny dowód opiera się na formalizacji w języku arytmetyku predykatu $Pr(x,y)$ takiego, że $\mathcal{N} \models Pr(x,y)$, jeśli y jest dowodem formuły x w PA (ściślej kodem dowodu kodu formuły). Predykat Pr musi spełniać dość naturalne warunki Hilberta-Bernaysa-Löba. Do dowodu używa się lematu przekątniowego (o punkcie stałym), który jest w zasadzie zapisaniem w języku arytmetyki kombinatora Y z rachunku lambda i pełni podobną funkcję (patrz [Bar81]). Pełen dowód w tej wersji można znaleźć np. w [Smo77].

Dowodem bardziej w duchu teorii modeli jest dowód Kreisla, który można znaleźć w [AZ91].

Wraz z prowadzonymi badaniami nad fragmentami arytmetyki Peano pojawia się naturalne pytanie o zachodzenie twierdzeń Gödla we fragmentach. W tej pracy pokazujemy zastosowanie jednego z teoriomodelowych dowodów drugiego twierdzenia Gödla, znajdującego się w [AB01], do słabych teorii wprowadzonych przez Bussa w [Bus86]. Oryginalny dowód stosuje się do znacznie silniejszych teorii, zawierających $I\Delta_0 + Exp$.

W sekcji 1. definiujemy narzędzia potrzebne do sformułowania i udowodnienia głównego twierdzenia, w szczególności twierdzenie Herbranda wraz z jego zastosowaniem do sformalizowania niesprzeczności teorii (sekcje 1.3., 1.4.) oraz używany język, w którym zakodowane są używane pojęcia (sekcje 1.5., 1.6.). W sekcji 2. przedstawiamy dowód głównego twierdzenia, wersji drugiego twierdzenia Gödla. Sekcja 3. przedstawia różnice między oryginalnym dowodem z [AB01]. W sekcji 4. opisana jest nieudana próba dowodu innej wersji twierdzenia.

1. Definicje

1.1. Konwencje notacyjne

Formuły oznaczamy literami greckimi $\phi, \psi, \theta \ldots$. Pisząc $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ mamy na myśli, że ϕ ma dokładnie n zmiennych wolnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Czasem zamiast pisać $\phi(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ będziemy pisać $\phi(\vec{n})$, gdy nie interesuje nas dokładna ilość zmiennych w formule i stosować również w tym kontekście zapis $\vec{n} \in M$, mając na myśli $n_1, n_2, \ldots, n_k \in M$, dla pewnej struktury M. Ciągi oznaczamy $\langle x_1, x_2, \ldots, x_l \rangle$, również dla niestandardowych l. Ciągi traktujemy czasem jako zbiory zawierające wszystkie wyrazy ciągu. Zapis $(k)_i$ oznacza i-ty wyraz ciągu k. Zapis $lh(k)$ oznacza długość ciągu k. Zbiory zdań i formuł oznaczamy symbolami T, T', T'', zbiory termów zaś Λ, Λ', Λ''. Termy bez zmiennych wolnych nazywamy zamkniętymi. Każdy zbiór termów zawiera wyłącznie termy zamknięte. Przez teorię rozumiemy dowolny zbiór zdań.

Dla zamkniętego termu t i zbioru termów Λ piszemy $t \subseteq \Lambda$, jeśli t należy do Λ wraz ze wszystkimi swoimi podtermami. Analogicznie stosujemy zapis $\vec{t} \subseteq \Lambda$.

Niech Λ będzie zbiorem termów. Zbiór zdań atomowych nad Λ definiujemy jako zbiór $\{\phi(\vec{t}\,) \mid \vec{t} \subseteq \Lambda\}$, gdzie ϕ jest formułą atomową i oznaczamy A_Λ. Analogicznie definiujemy zbiór zdań otwartych nad Λ i oznaczamy O_Λ.

Używamy standardowych podteorii arytmetyki Peano i symboli z nimi związanymi — $I\Delta_0$, T_2^i, Σ_j^b i innych. Krótki opis tych symboli i teorii znajduje się w sekcji 1.2, zaś szczegółowy opis można znaleźć w [HP93]. Mówiąc o tych teoriach czasem używać będziemy sformułowania "słabe arytmetyki". Klasa formuł $\exists\Sigma_j^b$ to domknięcie egzystencjalne klasy Σ_j^b, zaś $\forall\exists\Sigma_j^b$ to domknięcie uniwersalne klasy $\exists\Sigma_j^b$.

Zapis $M \prec_T M'$ dla teorii T oznacza, że M' jest T-elementarnym rozszerzeniem M, czyli że każda formuła z T jest prawdziwa w M przy pewnym podstawieniu wtedy i tylko wtedy, gdy jest prawdziwa przy tym samym podstawieniu w M'.

1.2. Język arytmetyki

Będziemy dowodzić wersję drugiego twierdzenia Gödla dla pewnej słabej wersji arytmetyki Peano. Opiszemy najpierw język tej arytmetyki, a potem język, w którym formułować będziemy używane przez nas pojęcia.

Słaba arytmetyka

Dowodzone twierdzenia dotyczą teorii T_2^i i S_2^i, wprowadzonych przez Bussa w [Bus86].

Język tych teorii (bo jest to cała rodzina teorii, parametryzowanych liczbą i) jest to język arytmetyki Peano rozszerzony o:

- Dwa jednoargumentowe symbole funkcyjne: $|x|$ i $\lfloor x/2 \rfloor$.
- Jeden dwuargumentowy symbol funkcyjny: $x\#y$.

Intencjonalne znaczenie tych symboli to:

- Symbol $|x|$ oznaczać ma najmniejszą liczbę naturalną większą od $log_2(x+1)$ (długość rozwinięcia binarnego liczby x).
- Symbol $\lfloor x/2 \rfloor$ ma oznaczać część całkowitą (entier) z $x/2$.
- Symbol $x\#y$ oznaczać ma $2^{|x|*|y|}$.

Oznaczmy ten język za [HP93] przez L_2. Buss definiuje najpierw system BASIC otwartych aksjomatów nad L_2, który ma na celu zdefiniowanie znaczenia nowych symboli funkcyjnych. Następnie definiowane są klasy formuł Σ_i^b i Π_i^b, które odpowiadają klasom Σ_i i Π_i w arytmetyce Peano w następujący sposób: kwantyfikatorom nieograniczonym w Σ_i i Π_i odpowiadają w Σ_i^b i Π_i^b kwantyfikatory ograniczone przez termy z L_2, zaś kwantyfikatorom ograniczonym odpowiadają kwantyfikatory ostro ograniczone. Kwantyfikator jest ostro ograniczony, jeśli jest postaci $\forall x \leq |t|$ lub $\exists x \leq |t|$ dla pewnego termu t z L_2. Dokładną definicję klas Σ_i^b i Π_i^b można znaleźć w definicji 4.2 w [HP93]. Ważny dla nas jest fakt, iż każda formuła ϕ z klasy Δ_0 należy do klasy Σ_i^b dla odpowiednio dużego i (większego od ilości kwantyfikatorów w ϕ).

Używany jest schemat indukcji $PIND$, który dla formuły $\phi(x)$ zdefiniowany jest następująco:

$$PIND(\phi(x)) \equiv \Big(\phi(0) \wedge \forall x\ .\ \phi(\lfloor x/2 \rfloor) \rightarrow \phi(x)\Big) \rightarrow (\forall x\ \phi(x))$$

Teoria T_2^i to $BASIC + I\Sigma_i^b$ zaś S_2^i to $BASIC + PIND\Sigma_i^b$, gdzie I oznacza zwykły schemat indukcji. Po szczegóły odsyłamy do V rozdziału, sekcji 4 w [HP93].

Używany język

Używać będziemy, z powodów technicznych, innego języka. Definicje, których używamy, pochodzą z [Ada03].

Definicja 1.1. *Niech $\phi(\vec{x})$ będzie formułą w L_2 zawierającą przynajmniej jeden kwantyfikator egzystencjalny. Definiujemy formułę ϕ' w zależności od postaci ϕ:*

- *Jeśli $\phi(\vec{x}) = \exists y \theta(y, \vec{x})$, to $\phi' = \theta$.*
- *Jeśli $\phi(\vec{x}) = \forall \vec{z}\ \exists y\ \theta(\vec{z}, \vec{x}, y)$, to $\phi' = \theta$.*

Język L definiujemy następująco:

- Symbole relacyjne w L to $=$ i $\leq$.
- Dla każdej formuły ϕ w języku L_2, która zawiera co najmniej jeden kwantyfikator egzystencjalny, w języku L znajduje symbol funkcyjny s^ϕ o arności równej ilości zmiennych wolnych w ϕ'.

Intuicyjnie, symbol funkcyjny s^ϕ oznacza symbol Skolema dla pierwszego kwantyfikatora egzystencjalnego w ϕ.

Formuły atomowe w L dla naszych celów to wyłącznie: $x = x, x = y, x \leq x, x \leq y$. Termy i symbole funkcyjne traktujemy niejako oddzielnie, mówiąc o instancji formuły (zdania) atomowej w pewnym zbiorze termów — patrz definicja 1.3.

Cecha języka[1] L, której będziemy potrzebować, a której nie ma język L_2, to: "Dla każdego zbioru termów Λ istnieje wielomianowo wiele zdań atomowych nad Λ". W L_2 nawet dla pustego zbioru termów istnieje nieskończenie wiele zdań atomowych nad nim, gdyż wśród nich są takie zdania jak : $0 + 0 = 0$, $0 + (0 + 0) = 0$ itp.

Dzięki naszej definicji unikamy drobnych problemów technicznych związanych z oddzielnym traktowaniem symboli funkcyjnych z L_2 i symboli s^ϕ. Mianowicie standardowe symbole funkcyjne z L_2 interpretujemy w L — np. 0 to $s^{\exists y.\ 0=y}$, $+$ to $s^{\forall x,y \exists z.\ z=x+y}$, analogicznie interpretujemy $*$, $|x|$, $x\#y$ i $\lfloor x/2 \rfloor$. Dokonujemy pewnego kanonicznego wyboru tych interpretacji i piszemy po prostu $*, +, |x|, \ldots$ na oznaczenie odpowiednich termów s^ϕ w języku L. Nie

[1] A w zasadzie przyjętej definicji formuł atomowych.

będzie to prowadziło do konfuzji z symbolami z L_2, gdyż od tej pory stosujemy w formułach i termach wyłącznie język L. Definicje klas formuł Σ_i^b i Π_j^b w naturalny sposób przenoszą się na język L.

1.3. Twierdzenie Herbranda i niesprzeczność Herbranda

Twierdzenie Herbranda pozwala na sformułowanie pojęcia niesprzeczności Herbranda teorii. W modelu standardowym pojęcie to jest równoważne standardowej (Hilbertowskiej) niesprzeczności, w słabych arytmetykach niekoniecznie.

Definicja 1.2. *Niech ϕ będzie zdaniem.*

Skolemizację ϕ, czyli formułę otwartą $sk(\phi)$, definiujemy typowo jako:

$$sk(\phi) = \theta(\vec{x}, s^{\phi'}(\vec{x}), \vec{y}, s^{\phi''}(\vec{x}, \vec{y}), \ldots)$$

dla $\phi = \forall\vec{x}\exists z\forall\vec{y}\exists z' \ldots \theta(\vec{x}, z, \vec{y}, z', \ldots)$.

Definicja 1.3. *Niech $\phi(\vec{x})$ będzie formułą.* Instancją ϕ w zbiorze termów Λ *nazywamy dowolną formułę $\phi(\vec{t})$, gdzie $\vec{t} \subseteq \Lambda$.*

Definicja 1.4. Wariantem Herbranda *formuły ϕ w Λ nazywamy dowolną instancję $\neg sk(\neg\phi)$ w Λ.*

Zwróćmy uwagę, iż warianty Herbranda są otwartymi zdaniami.

Definicja 1.5. *Formuła ϕ jest* dowodliwa w sensie Herbranda*, jeśli istnieje alternatywa jej wariantów Herbranda, która jest twierdzeniem logiki zdaniowej.*

Twierdzenie 1.6 (Herbranda, $I\Delta_0$+$SupExp$). *Formuła jest dowodliwa w sensie Herbranda wtedy i tylko wtedy, gdy jest twierdzeniem logiki pierwszego rzędu.*

Definicja 1.7. *Niech $T = \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$ będzie skończoną teorią. Zapisujemy $T \vdash_H \phi$, jeśli formuła $(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \ldots \wedge \phi_n) \to \phi$ jest dowodliwa w sensie Herbranda.*

Używając pojęć Herbrandowskich zawsze mamy na mysli skończone teorie.

Definicja 1.8. *Teoria T jest sprzeczna w sensie Herbranda (H-sprzeczna), jeśli $T \vdash_H \neg\phi_1 \vee \neg\phi_2 \vee \ldots \vee \neg\phi_n$. Teoria T jest niesprzeczna w sensie Herbranda (H-niesprzeczna), jeśli nie jest H-sprzeczna.*

Definicja 1.9. *Używamy zapisu $HCons_T(\phi)$ na oznaczenie faktu, że $T + \phi$ jest niesprzeczna w sensie Herbranda. Zatem $HCons_T(0 = 0)$ oznacza, iż teoria T jest niesprzeczna w sensie Herbranda. Analogicznie używamy pojęcia $HCons_T(S)$, gdzie S jest skończonym zbiorem zdań.*

Twierdzenie 1.10. *($I\Delta_0 + SupExp$) Teoria T jest niesprzeczna wtedy i tylko wtedy, gdy jest niesprzeczna w sensie Herbranda.*

W $I\Delta_0 + Exp$ oba pojęcia nie są jednak równoważne, patrz [Pud85].

1.4. Ewaluacje

Zdefiniujemy teraz podstawowe narzędzie do zakodowania Herbrandowskiej niesprzeczności w języku arytmetyki. Definicje podajemy za [Ada03].

Definicja 1.11. *Niech A_Λ oznacza zdania atomowe nad Λ. Niech O_Λ oznacza zdania otwarte nad Λ. Funkcję zerojedynkową $p : A_\Lambda \to \{0,1\}$ nazywamy Λ-ewaluacją, gdy jest równa 1 dla aksjomatów równościowych nad Λ, tzn.:*

$$\forall t \in \Lambda.\ p[\text{“}t = t\text{”}] = 1$$

$$\forall t_1, t_2 \in \Lambda.\ p[\text{“}t_1 = t_2\text{”}] = 1 \to p[\text{“}t_2 = t_1\text{”}] = 1$$

$$\forall t_1, t_2, t_3 \in \Lambda.\ (p[\text{“}t_1 = t_2\text{”}] = 1 \wedge p[\text{“}t_2 = t_3\text{”}] = 1) \to (p[\text{“}t_1 = t_3\text{”}] = 1)$$

$$\forall t_1, t_2, t_3, t_4 \in \Lambda.\ \Big(p[\text{“}t_1 = t_2\text{”}] = 1 \wedge p[\text{“}t_3 = t_4\text{”}] = 1\Big) \to \Big(p[\text{“}t_1 \leq t_3\text{”}] = 1 \to p[\text{“}t_2 \leq t_4\text{”}] = 1\Big)$$

Definicja 1.12. *Każda Λ-ewaluacja przedłuża się w naturalny sposób na funkcję $p^* : O_\Lambda \to \{0,1\}$:*

$$p^*_{|A_\Lambda} = p$$
$$p^*(\phi \wedge \psi) = p^*(\phi) * p^*(\phi)$$
$$p^*(\phi \vee \psi) = p^*(\phi) + p^*(\phi)$$
$$p^*(\neg\phi) = 1 - p^*(\phi)$$

Definicja 1.13. *Każdą Λ-ewaluację p przedłużamy na wszystkie zdania nad Λ, definiując indukcyjnie relację $p \models \phi(\vec{t})$, gdzie $\vec{t} \subseteq \Lambda$, w następujący sposób:*

- *Jeśli $\phi(\vec{x}) \in O_\Lambda$, to $p \models \phi(\vec{t})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p^*(\phi(\vec{t})) = 1$.*
- *Jeśli $\phi(\vec{x})$ jest formułą $\exists y\ \theta(\vec{x}, y)$, to $p \models \phi(\vec{t})$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi implikacja:*
$$s^\phi(\vec{t}) \subseteq \Lambda \implies p \models \theta(\vec{t}, s^\phi(\vec{t}))$$
- *Jeśli $\phi(\vec{x})$ jest formułą $\forall y\ \theta(\vec{x}, y)$, to $p \models \phi(\vec{t})$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi:*
$$\forall t' \in \Lambda.\ p \models \theta(\vec{t}, t')$$

Definicja 1.14. *Jeśli $p \models \phi$, to mówimy że p* spełnia *ϕ.*

Definicja spełniania, jak łatwo zauważyć, zależy w istotny sposób od zbioru Λ. Warto zwrócić też uwagę na fakt, że “homomorficzność” ewaluacji, rozumiana tak jak w definicji 1.12, nie musi zachodzić dla dowolnych formuł. Ewaluacja może bowiem spełniać koniunkcję formuł nie z powodu tego, że spełnia ona każdą z nich, tylko z powodu tego, iż w zbiorze Λ nie ma potrzebnych termów.

Można sformułować tę definicję inaczej, mówiąc że p spełnia zdanie ϕ, jeśli spełnia wszystkie dostępne instancje skolemizacji tego zdania w Λ (patrz Rozdział 1 w [Sal02]). Obie definicje są równoważne, ta jednak jest wygodniejsza ze względów technicznych.

Stwierdzenie 1.15. *Zdanie otwarte $\phi \in O_\Lambda$ jest twierdzeniem logiki zdaniowej wtedy i tylko wtedy, gdy każda Λ-ewaluacja spełnia ϕ.*

Definicja 1.16. *Niech T będzie teorią i niech Λ będzie zbiorem termów nad L. Λ-ewaluację nazywamy (Λ, T)-ewaluacją, jeśli spełnia ona wszystkie formuły z T.*

Twierdzenie 1.17 ([Sal02], Rozdział 2). *Teoria T jest niesprzeczna w sensie Herbranda wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego skończonego zbioru termów Λ w języku L_T istnieje (Λ, T)-ewaluacja.*

Dzięki temu twierdzeniu możemy sformalizować pojęcie Herbrandowskiej niesprzeczności w języku (słabej) arytmetyki.

1.5. Kodowanie

W tej sekcji opiszemy zastosowane kodowanie. Od tego momentu używamy symbolu T_2^i dla pewnego ustalonego i. Wybór i podany i uzasadniony jest w sekcji 2.1. Chcemy zakodować własność niesprzeczności Herbrandowskiej w $T = T_2^i$. Użyjemy w tym celu twierdzenia 1.17. Zdanie $HCons_T(\phi)$ brzmiało będzie po zakodowaniu tak: "dla każdego ciągu termów Λ o logarytmicznej długości, istnieje (Λ, T)-ewaluacja spełniająca ϕ". Potrzebujemy zatem pewnego kodowania termów, ciągów termów i ewaluacji, które będzie "miało sens" w T. Przez "miało sens" rozumiemy tu dowodliwość w T podstawowych własności kodowania — patrz np. Definicja 0.41 w [HP93]. Ponadto wymagamy od kodowania spełnienia kilku dodatkowych postulatów, które opiszemy w następnym punkcie.

Stosujemy zatem następujące kodowanie, oparte zasadniczo na kodowaniu w pracy [Sal02]. Ciągi, zbiory i termy kodujemy typowo jak w [HP93] dla $I\Delta_0$. Zbiory termów kodujemy jako ciągi, co jest bardzo istotne dla poprawności kodowania ewaluacji.

Dla ustalonego ciągu termów Λ, dzięki wybranemu językowi, formuł atomowych nad tym zbiorem jest wielomianowo wiele w zależności od $lh(\Lambda)$ ([Sal02], Rozdział 2). Dlatego Λ-ewaluację możemy zakodować jako parę (Λ, h), gdzie $h \in \{0,1\}^{\{0,1,\ldots,g(lh(\Lambda))\}}$ dla pewnego wielomianu g. Wartość ewaluacji na formule atomowej nad Λ jest określona poprzez wartość funkcji h na numerze tej formuły w pewnym kanonicznym ustawieniu ich w ciąg.

Całą resztę kodowania czerpiemy z [Sal02], zamieniając tylko w odpowiednich miejscach formułę kodującą ewaluację.

Naszkicujemy kilka używanych ograniczonych formuł (z klasy Δ_0). Wyjątkowo, aby polepszyć czytelność formuł, jako zmiennej w formule używać będziemy również litery Λ.

- $Num(z, x)$ — z koduje liczebnik $\overline{x}$. W stosowanych formułach później będziemy często pisać skrótowo $\overline{x}$, co należy rozumieć jako $\exists z \leq x\ Num(z, x) \to \theta$, gdzie w θ należy zastąpić wystąpienia $\overline{x}$ przez z.
- $Seq(s)$ — s jest ciągiem.
- $Term(t)$ — t jest termem.
- $Terms(t)$ — t jest ciągiem termów.
- $Atoms(k, \Lambda)$ — k jest ciągiem wszystkich formuł atomowych nad Λ. Ta formuła należy do klasy Δ_0, bo formuł atomowych nad danym ciągiem termów jest tylko wielomianowo wiele w stosunku do długości tego ciągu.
- $Open(f, \Lambda)$ — f jest formułą otwartą nad zbiorem termów Λ.

- $Eval(p, \Lambda)$ — p jest Λ-ewaluacją.
- $Sat(p, f, \Lambda)$ — p jest Λ-ewaluacją spełniającą f.
- $Eval_T(p, \Lambda, \phi)$ — p jest (T, Λ)-ewaluacją spełniającą ϕ (dla skończonej teorii T).

Będziemy używać też Σ_1 formuły $Log(k)$ oznaczającej: "istnieje 2^k".

Formułę $HCons_T(\phi)$ definiujemy następująco: "dla każdego ciągu termów Λ takiego, że $Log(lh(\Lambda))$, istnieje p taka, że $Eval_T(p, \Lambda, \phi)$.

Niech $H_T(\phi)$ oznacza zdanie $HCons_T(\phi)$ bez ograniczenia na długość ciągu termów, czyli "standardową" niesprzeczność Herbranda. Zwróćmy uwagę, że w modelu standardowym wszystkie elementy spełniają Log, więc $HCons_T(\phi)$ równoważna jest w nim $H_T(\phi)$. Teoria T dowodzi ponadto $H_T(\phi) \to HCons_T(\phi)$. Zatem dowód, że T nie dowodzi $HCons_T(\phi)$ jest lepszym wynikiem od dowodu, że T nie dowodzi $H_T(\phi)$, co usprawiedliwia to ograniczenie.

1.6. Własności kodowania

Poza typowymi własnościami, oczekujemy także od kodowania spełnienia następujących postulatów:

1. Jeśli Λ jest standardowo skończonym ciągiem termów, to kod Λ jest elementem każdego modelu T. Ściślej, chcemy by dla każdego $n \in \mathcal{N}$, T dowodziło zdania:

$$\forall\, x_1, x_2, \ldots, x_n.\ (Term(x_1) \wedge Term(x_2) \wedge \ldots \wedge Term(x_n)) \to \exists s.\ s = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle)$$

2. Zdanie $HCons_T(\phi)$ jest klasy Π_1.
3. Jeśli M jest modelem dla $T + HCons_T(\phi)$ i Λ jest standardowo skończonym ciągiem termów, to w M istnieje $(\Lambda, T + \phi)$-ewaluacja.

Punkt 1 potrzebny jest, aby pojęcie Herbrandowskiej niesprzeczności w modelu "miało sens". Bez punktu 1 sprzeczna teoria mogłaby być H-niesprzeczna w modelu, bo kod zbioru termów, dla którego nie ma ewaluacji, nie znalazł się w modelu.

Celowość punktów 2 i 3 wyjaśni się później (punktu 2 w twierdzeniu 2.11, punktu 3 w lemacie 2.8).

Kodowanie zdefiniowane w sekcji 1.5 spełnia te postulaty:

1. Ten punkt prawdziwy jest nawet w $I\Delta_0$.
2. Aby stwierdzić, że zdanie $HCons_T$ jest klasy Π_1, zauważmy najpierw, że zaczyna ono się tak:

$$\forall\Lambda\ Log(lh(\Lambda)) \to \exists p \ldots$$

Zauważmy najpierw, że w T zdanie to równoważne jest zdaniu:

$$\forall\Lambda\ \forall y.\ y = E(lh(\Lambda)) \to \exists p \ldots$$

Symbol E oznacza tu Δ_0-definicję funkcji wykładniczej.

Ewaluację p, przypomnijmy, kodujemy jako parę (Λ, f), gdzie f jest odpowiednią funkcją (patrz sekcja 1.5). Wielkość takiego obiektu zależy wykładniczo od $lh(\Lambda)$ (patrz [Sal02]), zatem $HCons_T$ możemy sformułować jako:

$$\forall\Lambda\ \forall y.\ y = E(lh(\Lambda)^2) \to \exists p < y \ldots$$

Resztę nieograniczonych kwantyfikatorów egzystencjalnych w $HCons_T$ możemy ograniczyć z góry przez pewną standardowo skończoną iterację funkcję wykładniczej od $lh(\Lambda)$. Oznaczmy tę iterację przez $E'(x)$. Definicja funkcji E' jest w klasie Δ_0. Dokonujemy więc na formule $HCons_T(\phi)$ następującej transformacji:

$$\forall x\ \exists y_1 < E'(x)\ \exists y_2 < E'(x)\ \ldots \exists y_n < E'(x)\ \psi(x, y_1, \ldots, y_n)$$

zamieniamy na:

$$\forall z\ \forall x < z\ (z > E'(x) \rightarrow (\exists y_1 < z, \exists y_2 < z, \ldots, \exists y_n < z\ \psi(x, y_1, \ldots, y_n)))$$

To wystarcza do stwierdzenia, że $HCons_T(\phi)$ jest klasy Π_1. Po szczegółowe uzasadnienie odsyłamy do rozdziału 2 w [Sal02].

3. Nasze kodowanie ewaluacji daje nam rownież spełnienie warunku 3. Standardowo skończony ciąg termów oczywiście ma dlugość znajdującą się w odcinku logarytmów, więc istotnie w modelu będzie istniała ewaluacja. Zauważmy, że przy typowym kodowaniu (funkcja z A do B kodowana jest jako podzbiór iloczynu kartezjańskiego A i B) standardowo skończone ciągi termów mogą znajdować się dowolnie wysoko w modelu, bo termy rownież można znaleźć dowolnie wysoko w modelu, więc nie mielibyśmy tej wlasności.

2. Główne twierdzenie

W tej sekcji udowodnimy główne twierdzenie tej pracy — T_2^i nie dowodzi $HCons_j(0 = 0)$, gdzie $HCons_j(0 = 0)$ jest silniejszą wersją Herbrandowskiej niesprzeczności, zdefiniowaną poniżej w definicji 2.2.

Od tej pory T oznaczać będzie zawsze skończoną aksjomatyzację T_2^i. Będziemy rozważali formuły z klasy Σ_j^b. Liczbę j, tak jak poprzednio, wybierzemy później.

Stwierdzenie 2.1. *$T \vdash \forall \phi.\ HCons_T(\phi \wedge 0 = 0) \rightarrow HCons_T(\phi)$.*

Dowód. Łatwy dowód z definicji ewaluacji da się sformalizować w T. □

W T istnieje formuła uniwersalna $Sat_j \in \exists\Sigma_j^b$ dla $\exists\Sigma_j^b$-formuł, czyli dla każdej liczby n, dla każdej formuły $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \exists\Sigma_j^b$ zachodzi:

$$T \vdash \forall y\ \forall y_1, y_2, \ldots, y_n.\ y = \langle y_1, y_2, \ldots, y_n \rangle \rightarrow (Sat_j(\phi, y) \leftrightarrow \phi(y_1, y_2, \ldots, y_n))$$

Definicja 2.2. *Formułę $HCons_j(\phi)$, dla ϕ będącego zdaniem nad pewnym zbiorem termów Λ definiujemy jako:*

$$\forall \psi(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \exists\Sigma_j^b\ \forall z.\ \Big(z = \langle z_1, z_2, \ldots, z_k \rangle \wedge Sat_j(\psi, z)\Big) \rightarrow HCons_T(\psi(\overline{z_1}, \overline{z_2}, \ldots, \overline{z_k}) \wedge \phi)$$

Definicja formuły $HCons_j$ znajdująca się powyżej jest nieco nieformalna. Występują w niej pewne skróty, w szczególności k może nie być standardowe, jednak pełne rozpisanie unieczytelniłoby ją do reszty. Intencja to: "Dla każdej formuły ψ z klasy $\exists\Sigma_j^b$, jeśli z jest ciągiem o długości równej ilości zmiennych wolnych ψ i $Sat_j(\psi, z)$, to ϕ jest H-niesprzeczna z ψ, w którym na zmienne wolne podstawione są odpowiednie liczebniki". W modelu ψ i z mogą być oczywiście niestandardowe, w szczególności ψ może mieć niestandardowo wiele zmiennych wolnych.

Twierdzenie 2.3. *Dla dowolnej formuły $\phi(x) \in \exists\Sigma^b_j$ zachodzi:*

$$T \vdash \forall x \forall z \leq x.\ (Num(z,x) \wedge \phi(x) \wedge HCons_j(0=0)) \rightarrow HCons_j(\phi(z))$$

Dowód. Niech M będzie dowolnym modelem T. Niech $n \in M$. Weźmy dowolną formułę (w modelu) $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \exists\Sigma^b_j$ (k może być niestandardowe). Załóżmy $M \models Sat_j(\psi, m)$, gdzie $m \in M$ koduje ciąg o długości k, $m = \langle m_1, m_2, \ldots, m_k \rangle$. Musimy pokazać:

$$M \models HCons_T(\psi(\overline{m_1}, \overline{m_2}, \ldots, \overline{m_k}) \wedge \phi(\overline{n}))$$

Ponieważ $M \models \phi(n)$, to $M \models Sat_j(\phi, \langle n \rangle)$. Również $M \models Sat_j(\psi, m)$. Niech $k \in M$ koduje konkatenację ciągów $\langle n \rangle$ i m. Zatem, z własności formuły Sat_j, $M \models Sat_j(\phi \wedge \psi, k)$. Stąd dostajemy $M \models HCons_T((\phi(\overline{n} \wedge \psi(\overline{m_1}, \overline{m_2}, \ldots, \overline{m_k})) \wedge 0 = 0)$. Stwierdzenie 2.1 daje nam tezę.

□

Twierdzenie 2.3 można w skrócie zapisać:

$$T \vdash \forall x\ (\phi(x) \wedge HCons_j(0=0)) \rightarrow HCons_j(\phi(\overline{x}))$$

i tej krótszej formy będziemy potem używać.

Analogicznie dowodzimy bardziej ogólnego twierdzenia:

Twierdzenie 2.4. *Dla każdego $n \in \mathcal{N}$ i formuł ϕ, ψ zachodzi:*

$$T \vdash \forall x, x_1, x_2, \ldots, x_n\ .\ \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge HCons_j(\psi(x)) \rightarrow HCons_j(\phi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}) \wedge \psi(x))$$

Definicja 2.5. *Model M teorii T nazywamy 1-domkniętym, jeśli $M \prec_{\Sigma^b_j} M'$ implikuje $M \prec_{\exists\Sigma^b_j} M'$.*

Lemat 2.6. *Niech $M_1 \prec_{\Sigma^b_j} M_2 \prec_{\Sigma^b_j} M_3 \prec_{\Sigma^b_j} \ldots$. Jeśli $M = \bigcup\{M_i \mid i \in \mathcal{N}\}$, to dla każdego $i \in \mathcal{N}$, $M_i \prec_{\Sigma^b_j} M$.*

Dowód. Niech $\phi \in \Sigma^b_j$. Dowodzimy przez indukcję po ϕ. Dla formuł otwartych teza jest oczywista. Wystarczy dowieść tezę dla formuł ϕ postaci $\phi(\vec{x}) = \exists y \leq t(\vec{x})\ \theta(\vec{x}, y)$ dla pewnego termu t i dla formuł postaci $\phi(\vec{x}) = \neg\theta(\vec{x})$. Tylko pierwszy przypadek nie jest natychmiastowy. Niech $\vec{n} \in M^k$ dla odpowiedniego k.

- Załóżmy, że $M_i \models \phi(\vec{n})$. Wtedy istnieje $m \in M_i$ takie, że $m <^{M_i} t^{M_i}(\vec{n})$ oraz $M_i \models \theta(\vec{n}, m)$. Wtedy również $m <^M t^M(\vec{n})$, z założenia indukcyjnego $M \models \theta(\vec{n}, m)$, co kończy dowód.

- Załóżmy, że $M \models \phi(\vec{n})$. Wtedy istnieje $m \in M$ takie, że $M \models m < t(\vec{n}) \wedge \theta(\vec{n}, m)$. Niech $j > i$ będzie takie, że $m, \vec{n} \in M_j$. Zatem $M_j \models \phi(\vec{n})$, a więc też $M_i \models \phi(\vec{n})$, co kończy dowód.

□

Twierdzenie 2.7 ([AB01], Remark 1.2.). *Każda niesprzeczna teoria T zawierająca wyłącznie $\forall\exists\Sigma^b_j$ zdania ma 1-domknięty model.*

Dowód. Niech $A = \{(m, \langle k_1, k_2, \ldots, k_n\rangle, \phi)\}$, gdzie $m, k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathcal{N}$, a ϕ jest $\exists\Sigma_j^b$ formułą o n zmiennych wolnych. Ustawmy elementy A w ciąg $t_1, t_2, \ldots$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że jeśli $t_l = (m, \langle k_1, k_2, \ldots, k_n\rangle, \phi)$, to $l \geq m$.

Zdefiniujemy indukcyjnie wieżę $M_0 \prec_{\Sigma_j^b} M_1 \prec_{\Sigma_j^b} \ldots$ przeliczalnych modeli T oraz ciągi $r^0, r^1, \ldots$ elementów tych modeli.

- Jako M_0 bierzemy dowolny przeliczalny model T, jako r^0 dowolne ustawienie elementów M_0 w ciąg.

- Załóżmy, że mamy zdefiniowane modele $M_0 \prec_{\Sigma_j^b} M_1 \prec_{\Sigma_j^b} \ldots \prec_{\Sigma_j^b} M_n$ oraz ciągi $r^0, r^1, \ldots, r^n$. Niech $t_l = (m, \langle k_1, k_2, \ldots, k_i\rangle, \phi)$. Jeśli istnieje przeliczalny model M' teorii T taki, że $M_n \prec_{\Sigma_j^b} M'$ i $M' \models \phi(r^m_{k_1}, r^m_{k_2}, \ldots, r^m_{k_i})$, to bierzemy $M_{n+1} = M'$, w przeciwnym przypadku bierzemy $M_{n+1} = M$. Jako r^{n+1} bierzemy dowolne ustawienie elementów M_{n+1} w ciąg.

Pokażemy, że $M = \bigcup\{M_i \mid i \in \mathcal{N}\}$ spełnia tezę twierdzenia.

- Najpierw należy pokazać, że $M \models T$. Weźmy więc zdanie $\phi \in T$. Ponieważ T zawiera wyłącznie $\forall\exists\Sigma_j^b$ zdania, to $\phi = \forall x \exists y\, \theta(x, y)$ dla pewnej formuły $\theta(x, y) \in \Sigma_j^b$. Warunek $M \models \phi$ zachodzi wtedy, i tylko wtedy, gdy dla każdego $m \in M$, $M \models \exists y\, \theta(m, y)$. Weźmy więc dowolne $m \in M$. Wtedy dla pewnego i, $m \in M_i$. Ponieważ $M_i \models T$, to $M_i \models \phi$, w szczególności $M_i \models \exists y\ \theta(m, y)$. Zatem istnieje $n \in M_i$ takie, że $M_i \models \theta(m, n)$. Ponieważ $M_i \prec_{\Sigma_j^b} M$, to $M \models \theta(m, n)$, więc $M \models \exists y\ \theta(m, y)$, co kończy dowód.

- Teraz pokażemy, że M jest 1-domknięty. Niech M' będzie modelem T takim, że $M \prec_{\Sigma_j^b} M'$. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M, \phi \in \exists\Sigma_j^b$ będą takie, że $M' \models \phi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Weźmy l takie, że $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M_l$. Niech $k_1, k_2, \ldots, k_n$ będą takie, że $r^l_{k_1} = a_1, r^l_{k_2} = a_2, \ldots, r^l_{k_n} = a_n$ i niech q będzie takie, że $t_q = (l, (k_1, k_2, \ldots, k_n), \phi)$. Mamy dwa możliwe przypadki:

  - Zachodzi $M_{q+1} = M_q$. Wtedy, z definicji wieży modeli, nie ma modelu T, który jest Σ_j^b-elementarnym rozszerzeniem M_q i który spełnia $\phi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Ale $M_q \prec_{\Sigma_j^b} M \prec_{\Sigma_j^b} M'$, sprzeczność, więc ten przypadek jest niemożliwy.
  - Zachodzi $M_{q+1} \neq M_q$. Z definicji wieży, $M_{q+1} \models \phi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Zatem istnieje $m \in M_{q+1}$ takie, że $M_{q+1} \models \theta(a_1, a_2, \ldots, a_n, m)$, gdzie $\phi = \exists x\ \theta(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)$. Zatem, ponieważ $M_{q+1} \prec_{\Sigma_j^b} M$, to $M \models \theta(a_1, a_2, \ldots, a_n, m)$, więc $M \models \phi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, co kończy dowód.

$\square$

Lemat 2.8. *Niech $\phi \in \exists\Sigma_j^b$. Niech $M \models HCons_j(\phi(\overline{m}))$. Wtedy teoria:*

$$T' = T + \{\theta(\underline{m_1}, \underline{m_2}, \ldots, \underline{m_n}) \mid \theta \in \exists\Sigma_j^b, m_1, m_2, \ldots, m_n \in M, M \models \theta(m_1, m_2, \ldots, m_n)\} + \phi(\underline{m})$$

w języku L', który jest językiem L rozszerzonym o stałe $\underline{m}$ dla wszystkich $m \in M$, ma model.

Dowód. Pokażemy, że wszystkie podteorie T' postaci:

$$T'' = S + \theta_1(\underline{m^1_1}, \underline{m^1_2}, \ldots, \underline{m^1_{k_1}}) + \ldots + \theta_n(\underline{m^n_1}, \underline{m^n_2}, \ldots, \underline{m^n_{k_n}})) + \phi(\underline{m})$$

mają model, co z twierdzenia o zwartości da tezę. Symbol S oznacza tu skończony podzbiór T. Wystarczy pokazać, że koniunkcja formuł z T'' ma model.

Używając kolejno faktu:

$$M \models HCons_j(\phi(\overline{m})) \wedge \theta_1(m_1^1, m_2^1, \ldots, m_{k_1}^1) \wedge \ldots \wedge \theta_n(m_1^n, m_2^n, \ldots, m_{k_n}^n)),$$

twierdzenia 2.4, definicji formuły $HCons_j$ i stwierdzenia 2.1 dostajemy fakt:

$$M \models HCons_T(\psi = (\theta_1(\overline{m_1^1}, \overline{m_2^1}, \ldots, \overline{m_{k_1}^1}) \wedge \ldots \wedge \theta_n(\overline{m_1^n}, \overline{m_2^n}, \ldots, \overline{m_{k_n}^n}) \wedge \phi(\overline{m}))) \qquad (2.8.1)$$

Weźmy w metateorii pewien standardowy zbiór Λ standardowych termów nad L'. Przypiszmy mu zbior termów $\overline{\Lambda}$ nad L w M w nastepujący sposób: każdemu termowi z Λ odpowiada term w $\overline{\Lambda}$, w którym wszystkie wystąpienia $\underline{m}$ zamienione są na $\overline{m}$, dla $m \in M$. Dzięki postulatowi 3. nałożonemu na kodowanie w sekcji 1.6, wiemy, ze w modelu istnieje $(\overline{\Lambda}, T + T'')$-ewaluacja p. Zdefiniujmy w metateorii $(\Lambda, T + T'')$-ewaluację p' dla tego zbioru w następujący sposób:

$$p'(\phi(\underline{m})) = 1 \equiv M \models p(\phi(\overline{m})) = 1$$
$$p'(\phi(\underline{m})) = 0 \equiv M \models p(\phi(\overline{m})) = 0$$

Wszystkie potrzebne własności p są prawdziwe w M, więc prawdziwe będą również w metateorii dla p'. W szczególności p' jest $(\Lambda, T + T'')$-ewaluacją.

Dowiedliśmy zatem, że dla każdego standardowego zbioru termów istnieje na nim ewaluacja. W metateorii pojęcie H-niesprzeczności jest równoważne zwykłej (Hilbertowskiej) niesprzeczności. Teoria T'' jest zatem niesprzeczna, więc ma model, co kończy dowód. □

Lemat 2.9. *Załóżmy, że $M \models HCons_j(0 = 0)$. Wtedy formuła $\psi(\phi, x) = HCons_j(\phi(\overline{x}))$ jest uniwersalna w M dla $\exists\Sigma_j^b$ formuł z jedną zmienną wolną, czyli $M \models \psi(\phi, m) \leftrightarrow \phi(m)$, dla $\phi \in \exists\Sigma_j^b$ i $m \in M$.*

Dowód.

- Najpierw pokażemy, że $M \models \phi(m) \rightarrow \psi(\phi, m)$. Załóżmy, że $M \models \phi(m)$. Z założenia mamy $M \models HCons_j(0 = 0)$. Twierdzenie 2.3 daje nam więc $M \models HCons_j(\phi(\overline{m}))$, czyli $M \models \psi(\phi, m)$.

- Implikacja w drugą stronę jest nieco trudniejsza. Załóżmy, że $M \models \psi(\phi, m)$. Z lematu 2.8 istnieje model M' teorii T'. Niech $g : M \rightarrow g(M) \subseteq M'$ będzie kanonicznym izomorfizmem, który elementowi $n \in M$ przyporządkowuje interpretację stałej $\underline{n}$ w M'. Strukturę M' możemy potraktować jako Σ_j^b-elementarne rozszerzenie M. Ściślej, prawdziwy jest lemat:

  Lemat 2.10. *Istnieje struktura N izomorficzna z M' taka, że $M \prec_{\Sigma_j^b} N$.*

  Dowód. (Szkic)

  – Rozszerzamy nośnik M o zbiór równoliczny $M' \setminus g(M)$. Niech N będzie nowym nośnikiem.

  – Rozszerzamy strukturę relacyjną M do struktury o nośniku N oraz g do funkcji $g' : N \rightarrow M'$ tak, by g' był izomorfizmem i by $g'_{|M} = g$.

  – Jeśli $N \models \theta(n_1, \ldots, n_k)$ dla $\theta \in \Sigma_j^b$, to $M' \models \theta(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_k})$. Wiemy, że Σ_j^b-diagram M jest teorią zupełną, więc $\neg\theta(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_k})$ nie należy do diagramu, bo $M' \models T'$, więc $\theta(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_k})$ należy do diagramu, co z definicji diagramu daje nam $M \models \theta(n_1, \ldots, n_k)$.

– Jeśli $M \models \theta(n_1, \ldots, n_k)$, to $N \models \theta(g(n_1), \ldots, g(n_k))$, więc $M' \models \theta(g'(n_1), \ldots, g'(n_k))$, więc $N \models \theta(n_1, \ldots, n_k)$.

Zatem $M \prec_{\Sigma_j^b} N$. □

Szczegółowy dowód znaleźć można np. w rozdziale 8 [CL01].

Mamy $M' \models \phi(\underline{m})$, więc $M' \models \phi(g(m))$, więc $M' \models \phi(g'(m))$, więc $N \models \phi(m)$, bo g' jest izomorfizmem rozszerzającym g.

Biorąc pod uwagę fakt, iż M jest 1-domknięty dostajemy $M \models \phi(m)$, co kończy dowód. □

Twierdzenie 2.11. *Niech M będzie 1-domkniętym modelem T. Wtedy $M \models \neg HCons_j(0 = 0)$.*

Dowód. Załóżmy, że $M \models HCons_j(0 = 0)$. Niech $\phi(x) = \neg\psi(x, x)$, gdzie ψ pochodzi z lematu 2.9. Wtedy $\phi \in \exists\Sigma_j^b$, bo $HCons_j \in \forall\Sigma_j^b$. Mamy więc:

$$M \models \phi(\phi) \leftrightarrow \neg\psi(\phi, \phi) \leftrightarrow \neg\phi(\phi)$$

Pierwsza równoważność pochodzi z definicji ϕ, druga z lematu 2.9. Otrzymana sprzeczność kończy dowód. □

Twierdzenie 2.12. *Teoria T nie dowodzi zdania $HCons_j(0 = 0)$.*

Dowód. Weźmy z twierdzenia 2.7 1-domknięty model $\forall\exists\Sigma_j^b$ konsekwencji T. Zdanie $HCons_j(0 = 0)$ jest w klasie $\forall\exists\Sigma_j^b$ (bo jest w klasie $\forall\Sigma_j^b$), więc nie może być konsekwencją T z powodu twierdzenia 2.11. □

2.1. Wybór stałych i oraz j

W tym momencie możemy już dokonać wyboru i dla teorii T_2^i oraz j dla teorii Σ_j^b, dla których prawdziwe są udowodnione twierdzenia.

W poprzednich korzystamy wielokrotnie implicite z pewnych własności wybranego kodowania dowodliwych w $I\Delta_0$, np. $T \vdash \forall s.\, Seq(s) \rightarrow |s| < s$. Chcemy, aby wszystkie te własności dowodliwe były również w T_2^i. W każdym dowodzie własności korzystamy skończenie wiele razy z aksjomatu indukcji dla formuł z klasy Δ_0. Niech $H(p)$ dla dowodu p będzie maksymalną liczbą k taką, że aksjomat indukcji użyty jest w p dla formuły zawierającej dokładnie k kwantyfikatorów ograniczonych. Wybieramy i tak, aby było większe od wszystkich liczb $H(p)$ dla użytych dowodów p. Ten wybór, z definicji klasy T_2^i, daje gwarancję, że każda taka własność będzie dowodliwa w T_2^i.

Względem wyboru j, zauważmy, że w dowodzie twierdzenia 2.11 potrzebujemy faktu, iż $HCons_j$ należy do klasy $\forall\Sigma_j^b$. Wiemy, że należy do klasy Π_1. Zatem j musi być wystarczająco duże, aby $HCons_j(\phi) \in \forall\Sigma_j^b$ — wystarczy wziąć j większe od liczby kwantyfikatorów ograniczonych w zdaniu $HCons_T(\phi)$.

3. Różnice między dowodami

Dowód przedstawiony w sekcji 2 opierał się na dowodzie z artykułu [AB01], w którym za pomocą analogicznych metod pokazuje się, iż każda podteoria PA zawierająca $I\Delta_0 + Exp$ nie dowodzi $Cons(PA)$. Tabela 1.1 pokazuje zasadnicze różnice między dowodami.

Pojęcie	Artykuł [AB01]	Praca magisterska
Język	Standardowy język arytmetyki Peano.	Język L.
Używane klasy formuł	Δ_0, Σ_1, Π_1.	Σ^b_j, $\exists\Sigma^b_j$, $\forall\exists\Sigma^b_j$.
Niesprzeczność	Standardowa (Hilbertowska).	Herbrandowska (odpowiednio zmodyfikowana, patrz definicja 2.2).
Kodowanie	Używana jest standardowe kodowanie dostępne w $I\Delta_0 + Exp$, w którym zdanie $Cons(PA)$ jest natychmiastowo klasy Π_1.	Trzeba zdefiniować odpowiednie kodowanie, mając na uwadze "sensowność" definicji $HCons$.
1-domkniętość	$M \prec_{\Delta_0} M'$ implikuje $M \prec_{\Sigma_1} M'$	$M \prec_{\Sigma^b_j} M'$ implikuje $M \prec_{\exists\Sigma^b_j} M'$
Twierdzenie 2.3	Wynika z Σ_1-zupełności dowodliwej w $I\Delta_0 + Exp$.	Wynika z postaci formuły $HCons$ oraz dowodu.

Rysunek 1.1: Różnice między dowodami

4. Inne próby

Pierwotnie ta praca magisterska przedstawiać miała dowód (tymi samymi metodami, co w sekcji 2) trochę innej wersji drugiego twierdzenia Gödla; mianowicie $T = I\Delta_0 + \Omega_1$ nie dowodzi $HCons^*_T(0 = 0)$, gdzie $HCons^*_T(0 = 0)$ odpowiada w naszej terminologii $HCons_T(0 = 0)$ z początkowym kwantyfikatorem ograniczonym do odpowiedniego definiowalnego odcinka początkowego. Oznaczmy ten odcinek początkowy przez I. Na czas tej sekcji $HCons^*_T$ zdefiniowane będzie jak wyżej, zaś $HCons_T$ oznaczać będzie $HCons^*_T$ bez ograniczenia przy początkowym kwantyfikatorze uniwersalnym. Niech $M \prec^I_K N$ dla klasy formuł K, $M \subseteq N$ i $I \subseteq M$ oznacza:

$$\forall\ \phi(\vec{x}) \in K\ \forall \vec{x} \in I.\ (M \models \phi(\vec{x})) \leftrightarrow (N \models \phi(\vec{x}))$$

Interesujące wydaje się być prześledzenie powodów porażki. Będziemy używali oznaczeń z dowodów w sekcji 2.

Pierwszą rzeczą rzucającą się w oczy jest konieczność posiadania pewnej wersji Σ_1-zupełności w dowodzie twierdzenia 2.3, które z kolei potrzebne jest przy dowodzie lematów 2.8 i 2.9. W [AB01] wykorzystywana jest naturalna Σ_1-zupełność dowodliwa w $I\Delta_0 + Exp$. W T nie ma dostępnego naturalnego odpowiednika. Narzuca się więc skorzystanie z wersji twierdzenia 2.3 znajdującej się w [AZ01] (warunek R2):

$$T \vdash \forall x \in I\ (HCons_T(0 = 0) \wedge \theta(x) \to HCons_T(\theta(\overline{x}))) \tag{4.0.1}$$

Formuła θ tu musi należeć do klasy Σ^I_1, gdzie Σ^I_1 oznacza formuły z klasy Σ_1 z początkowym kwantyfikatorem egzystencjalnym ograniczonym do odcinka I.

Aby móc użyć tego warunku, należy odpowiednio zdefiniować diagram w lemacie 2.8 — tak, by zawierał on Σ^I_1-prawdę dla odcinka I.

To od razu implikuje zmiany w lemacie 2.9 — $M \prec_{\Delta_0} N$ trzeba osłabić do $M \prec^I_{\Delta_0} N$.

W tym momencie nie możemy już skorzystać z faktu 1-domkniętości M. Nasuwa się więc osłabienie definicji 1-domkniętości do odcinka I — model M nazwiemy 1-domkniętym, jeśli $M \prec^I_{\Delta_0} N$ implikuje... Aby zobaczyć co warunek ten powinien implikować, należy przyjrzeć się założeniom lematu 2.9. Wystarczy, aby $M \prec^I_{\Delta_0} N$ implikowało $M \prec_{\Sigma^I_1} N$.

W tym momencie jednak zaczynają się pojawiać poważne problemy przy dowodzie twierdzenia 2.7. Klasę Π_2 formuł należy również zrelatywizować do odcinka, aby M miał szansę być modelem dla T. To jeszcze a priori nie stanowi dużego problemu. Dowód 1-domkniętości jednakże w ogóle przestaje działać — nie ma widocznego powodu, dla którego elementy z odcinka I w M muszą być elementami odcinka I w którymś z modeli M_i.

Drugim, równie poważnym problemem, jest fakt, iż potrzebujemy, czy to z powodu twierdzenia 2.7, czy z powodu założeń lematu 2.9, aby $HCons$ była formułą z klasy Π_1^I. Nie wiadomo, czy warunek 4.0.1 ma szansę być prawdziwym dla takiej formuły $HCons$.

5. Podsumowanie

Pokazaliśmy zastosowanie dowodu z [AB01] do dowodu wersji drugiego twierdzenia Gödla dla słabej arytmetyki. Dowód z [AB01] jest interesujący, gdyż nie używa explicite podstawień, które obecne są w oryginalnym dowodzie. Dlatego też interesujące wydaje się być badanie dla jak słabych teorii da się go zastosować. Próba opisana w sekcji 4 nie powiodła się, ale nie jest do końca jasne dlaczego, tzn. jaka konkretnie cecha teorii $I\Delta_0 + \Omega_1$ nie pozwoliła przeprowadzić dowodu. Na pewno dużą rolę odgrywa obecność (lub brak) odpowiednika Σ_1-zupełności. Dalsze badania w tym kierunku mogłyby być może przynieść lepsze rozumienie drugiego twierdzenia Gödla i ciekawe wnioski filozoficzne.

6. Podziękowania

Pragnę podziękować promotor pracy, Pani Zofii Adamowicz, za umożliwienie mi zapoznania się z tą dziedziną matematyki oraz za pomoc w przygotowaniu pracy.

Literatura

[AB01] Zofia Adamowicz and Teresa Bigorajska. Existentially closed structures and Gödel second incompleteness theorem. *Journal of Symbolic Logic*, 66(1):349–356, March 2001.

[Ada03] Zofia Adamowicz. A version of bounded arithmetics, unpublished. 2003.

[AZ91] Zofia Adamowicz and Paweł Zbierski. *Logika matematyczna.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1991.

[AZ01] Zofia Adamowicz and Paweł Zbierski. On Herbrand consistency in weak arithmetic. *Archive for Mathematical Logic*, 40(6):399–413, 2001.

[Bar81] H.P. Barendregt. *The Lambda Calculus, Its Syntax and Semantics*, volume 103 of *Studies in Logics and the Foundations of Mathematics.* North Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1981.

[Bus86] Samuel R. Buss. *Bounded arithmetic.* Bibliopolis, Naples, 1986.

[CL01] René Cori and Daniel Lascar. *Mathematical Logic. A Course with Exercises.* Oxford University Press, 2001.

[G3̈1] Kurt Gödel. Über formal unentscheidbare Sätze der 'Principia Mathematica' und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38:173–198, 1931.

[HP93] P. Hájek and P. Pudlák. *Metamathematics of First-Order Arithmetic.* Perspectives in Mathematical Logic. Springer, 1993.

[Pea89] Giuseppe Peano. *Arithmetices principa nova methoda exposita.* Torino, 1889.

[Pud85] Pavel Pudlák. Cuts, consistency statements and interpretations. *Journal of Symbolic Logic*, 50:423–441, 1985.

[Sal02] Saeed Salehi. *Herbrand Consistency in Arithmetics with Bounded Induction.* PhD thesis, Instytut Matematyki Polskiej Akademii Nauk, 2002.

[Smo77] C. Smoryński. The Incompleteness Theorems. In J. Barwise, editor, *Handbook of Mathematical Logic*, pages 821–867. North-Holland, Amsterdam, 1977.